

**Competencia Matemática Ernesto Paenza**

15<sup>o</sup> REALIZACIÓN — 29 DE AGOSTO DE 2000

Participante N<sup>o</sup>:

---

1 - Sea  $D_r \subset \mathbb{R}^2$  un disco cerrado de radio  $r$ . Probar que, cualquiera sea la circunferencia  $C \subset \mathbb{R}^2$ , la longitud del arco  $C \cap D_r$  es menor o igual que  $2\pi r$ .

---

2 - Decidir si es posible cargar dos dados (no necesariamente ambos de la misma manera) de forma tal que, al arrojarlos, todos los números desde el 2 hasta el 12 tengan la misma probabilidad de ser la suma de las dos caras superiores.

*Cargar los dados significa asignar números  $p_1, \dots, p_6, q_1, \dots, q_6$ , uno para cada cara, con  $0 \leq p_i, q_i \leq 1$  y  $\sum p_i = \sum q_i = 1$ , que indican la probabilidad con que sale esa cara cuando se arroja el dado respectivo.*

---

3 - Estudiar la convergencia de la serie

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{6} \dots$$

Si converge, calcular el valor de la suma.

---

4 - El polinomio  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  verifica:  $p(t) \geq 0$  si  $t \geq 0$ . Probar que existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $(1+x)^m p(x)$  tiene todos sus coeficientes no negativos.

---

5 - ¿Para qué valores de  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que el volumen  $n$ -dimensional de

$$T_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n : x_i + x_{i+1} < 1, i = 1, \dots, n-1\}$$

es igual a  $\frac{1}{n}$ ?

---

6 - Una acción  $\phi$  de un grupo  $G$  en un conjunto  $S$ , es un morfismo de grupos  $\phi : G \rightarrow S!$ , donde  $S!$  es el grupo de biyecciones de  $S$ . Si  $x \in G$ ,  $s \in S$ , denotamos  $\phi(x) = \phi_x \in S!$ , es decir  $\phi_x : S \rightarrow S$  es una biyección.

Dada una acción  $\phi$  de  $G$  en  $S$ , queda determinada también una acción  $(\phi, \phi)$  de  $G$  en  $S \times S$  definida por  $\phi_x(s, t) := (\phi_x(s), \phi_x(t))$ .

Si  $s_0 \in S$ , la *órbita* de  $s_0$  es el conjunto  $\Gamma_{s_0} := \{s \in S / \exists x \in G : s = \phi_x(s_0)\}$ . Se sabe que las órbitas de distintos elementos resultan iguales o disjuntas. Una acción con una sola órbita se llama *transitiva*.

a- Dar un ejemplo de una acción transitiva  $\phi$  en un conjunto infinito  $S$  tal que la acción  $(\phi, \phi)$  en  $S \times S$  tenga un número infinito de órbitas.

b- Dar un ejemplo de una acción transitiva  $\phi$  en un conjunto infinito  $S$  tal que la acción  $(\phi, \phi)$  en  $S \times S$  tenga solo un número finito de órbitas.

---

Nota: Se asigna puntaje no nulo a argumentos conducentes a una solución, casos particulares, respuestas correctas no justificadas, etc. Por otro lado, para obtener el máximo puntaje en un ejercicio, es necesario justificar apropiadamente la respuesta.