Titulo : nuevas familias de superficies racionales anticanonicas

Resumen : construimos y estudiamos una familia de *superficies racionales anticanónicas* (i.e. : birracionales al plano proyectivo y con un divisor anticanónico efectivo) parametrizada por el espacio de modulos de curvas elípticas. Su estudio está íntimamente ligado al estudio de los revestimientos de curvas elípticas por una curva hiperelíptica.

En la charla partiremos de una curva elíptica dada X y estudiaremos los revestimientos de X por una curva hiperelíptica (eventualmente singular pero irreducible) Γ, $\pi : \Gamma \rightarrow X$, marcada en un punto de Weierstrass liso $p \in \Gamma$. Dada esta situacion, se las puede encajar naturalmente en la jacobiana (generalizada) de Γ, de tal modo que (las imágenes de) X y Γ se cortan en el origen $0 \in \mathrm{Jac}\Gamma$. Se puede entonces definir el *orden de osculación* de X respecto a Γ en $0 \in \mathrm{Jac}\Gamma$. Por ejemplo, si d=1, X y Γ sont tangentes en $0 \in \mathrm{Jac}\Gamma$

Nos proponemos estudiar las relaciones entre n, g y d : el grado de π, el género aritmético de Γ y el orden de osculación en cuestión.
Diremos en tal caso que $\pi : (\Gamma, p) \rightarrow (X, \pi(p))$ es un revestimiento hiperelíptico d-osculante de grado n y género g.

Todos estos revestimientos se factorizan a través de una superficie reglada de base X, $\pi_S : S \rightarrow X$. Esto permite su estudio en tanto divisores de S cuyas clases de equivalencia lineal se escriben en función de los invariantes numéricos n, d y g asociados a $\pi : (\Gamma, p) \rightarrow (X, \pi(p))$.

De hecho hay tres superficies, construidas a partir de la curva elíptica X, que intervienen :

1) $\pi_S : S \rightarrow X$, la única superficie reglada de base X, que tiene una única seccion, C_o, de autointersección nula. Es isomorfa al proyectivizado del único fibrado vectorial indecomposable de rango 2 y grado 0 sobre X. Posee una involución $\tau : S \rightarrow S$ con 8 puntos fijos aislados ;

2) $e : S^{\perp} \rightarrow S$, el estallido de S en los 8 puntos fijos de $\tau : S \rightarrow S$; esta segunda superficie posee 8 curvas excepcionales, (los estallados de los 8 puntos fijos de $\tau : S \rightarrow S$), los cuales quedan fijos por $\tau^{\perp} : S^{\perp} \rightarrow S^{\perp}$, el levantado de $\tau : S \rightarrow S$ a $S^{\perp}$;

3) el cociente de $S^{\perp}$ por la involución $\tau^{\perp}: S^{\perp} \to S^{\perp}$, $\varphi : S^{\perp} \to S^{\sim}$, lo que da lugar finalmente a la superficie racional $S^{\sim}$, cuyo divisor anticanónico es efectivo (y tambien *nef*). Se trata del plano proyectivo $\mathbf{P}^2$ estallado en 9 puntos « bien elegidos »…

4) En característica 0, se prueba que en $S^{\sim}$ existen exactamente nueve curvas de auto-intersección -2, así como una infinidad de curvas excepcionales (de auto-intersección –1).

En cambio, en característica $p > 2$, la situación cambia drásticamente : una décima curva de auto-intersección –2 aparece, lo cual implica la existencia de un número finito de curvas excepcionales de auto-intersección –1 (número que depende de p).

De última, esto también implica otro tipo de diferencias a nivel de los revestimientos hiperelipticos d-osculantes arriba mencionados. Por ejemplo, en característica $p = 0$ el género aritmético de los revestimientos hiperelípticos d-osculantes no está acotado. En cambio, si $p > 2$, todo revestimiento hiperelíptico d-osculantes tiene un género g mayorado por $2g < p(2d-1)$.

Todos estos resultados se generalizan al caso en que se reemplaza la curva elíptica X por una curva hiperelíptica arbitraria ; pero esto ya es otra historia..íáóú

Referencia :

Revêtements hyperelliptiques d-osculateurs et solitons elliptiques de la hiérarchie KdV ; C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, t. 345 (2007) 213-218,