# Introducción a las Álgebras de Hopf


## Leandro Vendramin


Estas notas corresponden a la charla "Introducción a las Álgebras de Hopf" del Seminario de Alumnos del Departamento de Matemática de la Universidad de Buenos Aires.

## Producto tensorial

Sean $V$ y $W$ dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$. El producto tensorial de $V$ y $W$, que notaremos $V \otimes W$, es el espacio vectorial cuyos objetos son de la forma

$$v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \cdots + v_k \otimes w_k$$

con las relaciones

$$\begin{aligned}
\lambda_1(v_1 \otimes w) + \lambda_2(v_2 \otimes w) &= (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \otimes w \\
\lambda_1(v \otimes w_1) + \lambda_2(v \otimes w_2) &= v \otimes (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)
\end{aligned}$$

Si $f : U \to U'$ y $g : V \to V'$ son tranformaciones lineales se define la tranformación lineal $f \otimes g : U \otimes V \to U' \otimes V'$ por $u \otimes v \mapsto f(u) \otimes g(v)$. Tenemos entonces una tranformación lineal

$$\alpha : \hom(U, U') \otimes \hom(V, V') \to \hom(U \otimes V, U' \otimes V')$$

### Una definición más formal

$V \otimes W$ se define formalmente como el espacio vectorial cociente $\mathbb{C}[V \times W]/S$, donde $\mathbb{C}[V \times W]$ es el $\mathbb{C}$-espacio vectorial generado por $V \times W$ y $S$ el subespacio generado por los elementos de la forma

$$\begin{gathered}
(v_1 + v_2) \otimes w - v_1 \otimes w - v_2 \otimes w \\
v \otimes (w_1 + w_2) - v \otimes w_1 - v \otimes w_2 \\
(\lambda v) \otimes w - \lambda(v \otimes w) \\
v \otimes (\lambda w) - \lambda(v \otimes w)
\end{gathered}$$

### Propiedades básicas y ejercicios

En forma de ejercicios presentamos algunas propiedades básicas del producto tensorial de espacios vectoriales

1. Construir una biyección entre el conjunto de funciones bilineales $V \times W \to U$ y el conjunto de funciones lineales $V \otimes W \to U$

2. Probar que si $\{v_i\}_{i \in I}$ es base de $V$ y $\{w_j\}_{j \in J}$ es base de $W$ entonces $\{v_i \otimes w_j\}_{i \in I, j \in J}$ es base de $V \otimes W$. En particular, si $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$ entonces $\dim(V \otimes W) = nm$

3. Probar que valen los siguientes isomorfismos:

    *a*) $(U \otimes V) \otimes W \simeq U \otimes (V \otimes W)$ por la aplicación $(u \otimes v) \otimes w \mapsto u \otimes (v \otimes w)$

b) $\mathbb{C} \otimes V \simeq V$ por la aplicación $\lambda \otimes v \mapsto \lambda v$. Análogamente, $V \otimes \mathbb{C} \simeq V$

c) $V \otimes W \simeq W \otimes V$ por la aplicación $u \otimes w \mapsto w \otimes v$

4. a) Probar que si $V$ es de dimensión finita entonces $V^* \otimes W \simeq \hom(V, W)$

   b) Probar que $\hom(U \otimes V, W) \simeq \hom(U, \hom(V, W))$

5. Probar que vale
$$\left(\bigoplus_{i \in I} U_i\right) \otimes V \simeq \bigoplus_{i \in I} (U_i \otimes V)$$

6. Probar que $(f_1 \circ f_2) \otimes (g_1 \circ g_2) = (f_1 \otimes g_1) \circ (f_2 \otimes g_2)$

7. Probar que si $f$ es un epimorfismo entonces $f \otimes \mathrm{id}$ también y calcular $\ker(f \otimes \mathrm{id})$

8. Probar que la tranformación lineal $\alpha$ es inyectiva.

## Álgebras, coálgebras y biálgebras

### Álgebras

Un **álgebra** sobre $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial $A$ provisto de una función bilineal $m : A \times A \to A$, $a \otimes b \mapsto ab$, tal que $a(bc) = (ab)c$. Supondremos además que el álgebra tiene **unidad**: existe un elemento $1 \in A$ tal que $a1 = 1a = a$.

Si $A$ y $B$ son álgebras, una tranformación lineal $f : A \to B$ se dice **morfismo de álgebras** si $f(aa') = f(a)f(a')$ y $f(1) = 1$.

### Ejemplos

1. $A = \mathbb{C}$ es un álgebra conmutativa con unidad.

2. $A = \mathbb{C}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ el álgebra de polinomios en las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

3. $A = \mathbb{C}^{n \times n}$ el álgebra de matrices de $n \times n$.

4. $A = \mathrm{end}(V)$ el álgebra de endomorfismos de un espacio vectorial $V$. La multiplicación de $A$ está dada por la composición de endomorfismos.

5. $A = \mathbb{C}\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ el álgebra libre en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Un base de $A$ son palabras en las letras $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y el producto es la concatenación de palabras.

6. Si $A$ es un álgebra se define el álgebra opuesta $A^{\mathrm{op}}$ con el producto $a \cdot a' = a'a$.

7. Si $A$ y $B$ son álgebras entonces $A \otimes B$ es un álgebra definiendo $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$. Observar que $1_A \otimes 1_B$ es la unidad del álgebra $A \otimes B$.

**El ejemplo: el álgebra de grupo**

Sea $G$ un grupo. Considero el álgebra de grupo $A = \mathbb{C}G$ que es un espacio vectorial con base $\{g \mid g \in G\}$. El producto viene dado por

$$\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right)\left(\sum_{g\in G} \beta_g g\right) = \sum_{g,h\in G} \alpha_g \beta_h (gh) = \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} \alpha_h \beta_{h^{-1}g}\right) g$$

Observemos que en para definir esta esta estructura de álgebra sobre $\mathbb{C}G$ no es necesario que todo elemento de $g$ tenga un inverso: alcanza con pedir que $G$ sea un monoide.

**Módulos sobre álgebras**

Un espacio vectorial $V$ es un $A$-**módulo** (a izquierda) si existe una función bilineal $A \times V \to V$ , $(a, v) \mapsto a \cdot v$ tal que $a \cdot (a' \cdot v) = (aa') \cdot v$ y $1 \cdot v = v$ para todo $a, a' \in A$, $v \in V$. Si $V$ y $W$ son $A$-módulos una tranformación lineal $f : V \to W$ se dice **morfismo de** $A$-**módulos** si $f(a \cdot v) = a \cdot f(v)$ para todo $a \in A$, $v \in V$.

**Ejemplo (otra vez en el álgebra de grupo)**

Sean $G$ un grupo y $A = \mathbb{C}G$ el álgebra de grupo. Si $V$ y $W$ son $A$-módulos entonces $\mathbb{C}$,$V \otimes W$ y $V^* = \hom(V, \mathbb{C})$ son $A$-módulos definiendo

$$g \cdot 1 = 1$$
$$g \cdot (v \otimes w) = g \cdot v \otimes g \cdot w$$
$$(g \cdot f)(v) = f(g^{-1} \cdot v)$$

**Coálgebras**

Definiremos a continuación una noción "dual" a la de álgebra. Una **coálgebra** sobre $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial tal que

1. (**coproducto**) Existe una tranformación lineal $\Delta : C \to C \otimes C$ tal que $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$

2. (**counidad**) Existe una tranformación lineal $\varepsilon : C \to \mathbb{C}$ tal que $(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\Delta = \mathrm{id} = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta$

**Ejemplos**

1. $\mathbb{C}$ es un coálgebra con $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ y $\varepsilon(1) = 1$.

2. El dual de una coálgebra $C$ es un álgebra definiendo, para $f, g \in C^*$ y $c \in C$,

$$(fg)(c) = m(f \otimes g)\Delta(c)$$
$$1_{C^*} = \varepsilon$$

3. El dual de un álgebra $A$ de dimensión finita es una coálgebra. Si el álgebra $A$ es de dimensión finita entonces $(A \otimes A)^* \simeq A^* \otimes A^*$. Tiene sentido entonces definir

$$\begin{gathered} \Delta(f)(x \otimes y) = f(xy) \\ \varepsilon(f) = f(1) \end{gathered}$$

4. $C = \mathbb{C}G$ es una coálgebra con $\Delta(g) = g \otimes g$ y $\varepsilon(g) = 1$.

5. Si $C$ es una coálgebra se define la coálgebra opuesta $C^{\text{cop}}$ por $\Delta^{\text{op}} = \tau\Delta$, donde $\tau : C \otimes C \to C \otimes C$ está definido por $c \otimes c' \mapsto c' \otimes c$.

6. Si $C$ y $C'$ son coálgebras entonces $C \otimes C'$ es coálgebra con $\Delta_{C \otimes C'} = (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})(\Delta_C \otimes \Delta_{C'})$ y $\varepsilon_{C \otimes C'} = \varepsilon_C \otimes \varepsilon_{C'}$.

7. Sea $A = \mathrm{M}(n, \mathbb{C})$ el el álgebra de matrices de $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{C}$. Sabemos que las matrices $E_{ij}$ forman una base del espacio vectorial $A$. Sea $\{e_{ij}\}$ la base dual a $\{E_{ij}\}$. Entonces $A^*$ es una coálgebra con

$$\begin{gathered} \Delta(e_{ij}) = \sum_k e_{ik} \otimes e_{kj} \\ \varepsilon(e_{ij}) = \delta_{ij} \end{gathered}$$

**Observación**

Sea $A$ un álgebra y sean $V$ y $W$ dos $A$-módulos entonces $V \otimes W$ es un $A \otimes A$-módulo. Si existe un morfismo de álgebras $\Delta : A \to A \otimes A$ es posible definir una estructura de $A$-módulo en $V \otimes W$:

$$a \cdot (v \otimes w) = \Delta(a) \cdot (v \otimes w)$$

Tenemos entonces

1. Si $V$, $W$ y $X$ son $A$-módulos entonces $(V \otimes W) \otimes X \simeq V \otimes (W \otimes X)$ como espacios vectoriales. ¿Cuándo este isomorfismo de espacios vectoriales es además isomorfismo de $A$-módulos? Respuesta: si y sólo si $\Delta$ es coasociativa.

2. El isomorfismo canónico de espacios vectoriales $V \otimes \mathbb{C} \to V$ [resp. $\mathbb{C} \otimes V \to V$] es isomorfismo de $A$-módulos si y sólo si $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta = \mathrm{id}$ [resp. $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta = \mathrm{id}$].

**Biálgebras**

Diremos que un espacio vectorial $B$ es una **biálgebra** (sobre $\mathbb{C}$) si se verifican las siguientes condiciones:

1. $B$ es álgebra

2. $B$ es coálgebra

3. $\Delta : B \to B \otimes B$ y $\varepsilon : B \to \mathbb{C}$ son morfismos de álgebras.

### Producto de Convolución

Si $B$ una biálgebra, definimos en $\hom_{\mathbb{C}}(B,B)$ la convolución: si $f,g \in \hom_{\mathbb{C}}(B,B)$ entonces

$$f \star g = m(f \otimes g)\Delta$$

Vale entonces que $(\hom(B,B), \star, \eta\varepsilon)$ es un álgebra.

### Antípoda

Una tranformación lineal $S \in \hom_{\mathbb{C}}(B,B)$ se llama **antípoda** si $S \star \mathrm{id} = \mathrm{id} \star S = \eta\varepsilon$. Observemos que no siempre existe la antípoda pero de existir es única (por ser el inverso de la identidad con respecto a la convolución). Valen las siguientes propiedades de la antípoda

1. $S(xy) = S(y)S(x)$
2. $S(1) = 1$
3. $(S \otimes S)\Delta = \Delta^{\mathrm{op}} S$
4. $\varepsilon S = S$

Para una demostración de las desigualdades anteriores consultar [1, 2].

### Observación (¿cómo se ve esto en el álgebra de grupo?)

Si $G$ es un monoide y $B = \mathbb{C}G$ vale que $B$ tiene antípoda si y sólo si todo elemento de $G$ tiene inverso [es decir, si y sólo si $G$ es un grupo] pues $xS(x) = S(x)x = \varepsilon(x)1 = 1 \Rightarrow S(x) = x^{-1}$.

### Definición de álgebra de Hopf.

Una biálgebra $B$ con antípoda se llamará **álgebra de Hopf.**

### Ejemplos

1. $\mathbb{C}G$ el álgebra de grupo es un álgebra de Hopf.
2. (álgebra de Sweedler) Sea $H$ el álgebra generada por $x, y$ con las relaciones $x^2 = 1$, $y^2 = yx + xy = 0$. $H$ es un espacio vectorial de dimensión 4 con base $1, x, y, xy$ que resulta un álgebra de Hopf definiendo

$$\Delta(x) = x \otimes x, \qquad \varepsilon(x) = 1, \qquad S(x) = x$$
$$\Delta(y) = 1 \otimes y + y \otimes x, \qquad \varepsilon(y) = 0, \qquad S(y) = xy$$

### Observación

Sean $B$ es una biálgebra y $S : B \to B^{\mathrm{op}}$ es un isomorfismo de álgebras. Si $V$ un $B$-módulo entonces $V^*$ es también un $B$-módulo con $(a \cdot f)(v) = f(S(a) \cdot m)$. ¿Cuáles son las condiciones que deben verficiarse para que la evaluación $V^* \otimes V \to \mathbb{C}$ [resp. $V \otimes V^* \to \mathbb{C}$] sea morfismo de $B$-módulos? Respuesta: la evaluación $V^* \otimes V \to \mathbb{C}$ [resp. $V \otimes V^* \to \mathbb{C}$] es morfismo de $B$-módulos si y sólo si $S \star \mathrm{id} = \eta\varepsilon$ [resp. $\mathrm{id} \star S = \eta\varepsilon$].

## Referencias


[1] Christian Kassel. *Quantum groups*, volume 155 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] Susan Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings*, volume 82 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1993.