Estimaciones en normas con pesos y aplicaciones a la aproximación numérica de problemas elípticos con datos singulares

Ricardo G. Durán

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
IMAS, UBA-CONICET

SEDAN
29 de mayo de 2018

Trabajo conjunto con Irene Drelichman e Ignacio Ojea

RESUMEN

- Problema modelo.

RESUMEN

- Problema modelo.
- Formulación débil y aproximación.

RESUMEN

- Problema modelo.
- Formulación débil y aproximación.
- Estabilidad y convergencia.

RESUMEN

- Problema modelo.
- Formulación débil y aproximación.
- Estabilidad y convergencia.
- Tipos de mallas.

RESUMEN

- Problema modelo.
- Formulación débil y aproximación.
- Estabilidad y convergencia.
- Tipos de mallas.
- Problemas singulares.

RESUMEN

- Problema modelo.
- Formulación débil y aproximación.
- Estabilidad y convergencia.
- Tipos de mallas.
- Problemas singulares.
- Normas con pesos.

RESUMEN

- Problema modelo.
- Formulación débil y aproximación.
- Estabilidad y convergencia.
- Tipos de mallas.
- Problemas singulares.
- Normas con pesos.
- Aplicación al problema de Poisson con medidas como fuentes.

PROBLEMA DE POISSON

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ polígono o poliedro.
Consideramos

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \text{ in } \ \Omega, \\ \quad\ \ u = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

PROBLEMA DE POISSON

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ polígono o poliedro.
Consideramos

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \text{ in } \ \Omega, \\ \quad u = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

Forma débil:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Por teorema de Lax-Milgram, si $f \in H^{-1}(\Omega) := H_0^1(\Omega)^*$ el problema tiene una única solución en $u \in H_0^1(\Omega)$ y vale

$$\|u\|_{H_0^1} \leq \|f\|_{H^{-1}}$$

En realidad la forma correcta es

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

PROBLEMA DISCRETO

Aproximación por elementos finitos:

$$V_h = \{v \in H_0^1(\Omega) \,:\, v|_T \in \mathcal{P}_1 \;\; \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

$\{\mathcal{T}_h\}$ es una familia de triangulaciones
$h \to 0$ es un parámetro asociado a cada triangulación
Por ejemplo el máximo diámetro de los elementos.

PROBLEMA DISCRETO

Aproximación por elementos finitos:

$$V_h = \{v \in H_0^1(\Omega) \; : \; v|_T \in \mathcal{P}_1 \;\; \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

$\{\mathcal{T}_h\}$ es una familia de triangulaciones
$h \to 0$ es un parámetro asociado a cada triangulación
Por ejemplo el máximo diámetro de los elementos.
Se define la solución aproximada $u_h \in V_h$ por

$$\int_\Omega \nabla u_h \nabla v = \int_\Omega f v \qquad \forall v \in V_h$$

Es decir, u_h es la proyección ortogonal sobre V_h en la forma bilineal asociada a la ecuación.

ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA

Tomando u_h como función de prueba en la formulación discreta se obtiene enseguida la estabilidad:

$$\|\nabla u_h\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}$$

Tomando cualquier $v \in V_h$ y observando que $(u - v)_h = u_h - v_h = u_h - v$ resulta

$$\|\nabla(u_h - v)\|_{L^2} \leq \|\nabla(u - v)\|_{L^2}$$

y en consecuencia

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq 2 \inf_{v \in V_h} \|\nabla(u - v)\|_{L^2} = 2 \, \mathrm{dist}_{H_0^1}(u, V_h)$$

lo que implica la convergencia siempre que $\mathrm{dist}_{H_0^1}(u, V_h) \to 0$ cuando $h \to 0$

Análogamente, en el problema elíptico más general

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\gamma|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \le M|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

se obtiene

$$\|\nabla u_h\|_{L^2} \le C_{est}\|\nabla u\|_{L^2}$$

donde $C_{est} = C_{est}(\gamma, M)$ es la constante de estabilidad.

ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA

Análogamente, en el problema elíptico más general

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\gamma|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \leq M|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

se obtiene

$$\|\nabla u_h\|_{L^2} \leq C_{est}\|\nabla u\|_{L^2}$$

donde $C_{est} = C_{est}(\gamma, M)$ es la constante de estabilidad.
En consecuencia

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq (C_{est} + 1)\, \text{dist}_{H_0^1}(u, V_h)$$

En particular

$$\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2} \leq (C_{est}+1)\|\nabla(u-I_h u)\|_{L^2}$$

donde $I_h u$ es alguna buena aproximación de u, por ejemplo interpolación de Lagrange.
Bajo ciertas suposiciones sobre la familia de mallas $\{\mathcal{T}_h\}$ puede demostrarse, para $0 \leq s \leq 1$,

$$\|\nabla(u-I_h u)\|_{L^2} \leq C_{int} h^s |u|_{H^{1+s}}$$

ESTIMACIONES DE ERROR Y ORDEN

En particular

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq (C_{est} + 1)\|\nabla(u - I_h u)\|_{L^2}$$

donde $I_h u$ es alguna buena aproximación de u, por ejemplo interpolación de Lagrange.
Bajo ciertas suposiciones sobre la familia de mallas $\{\mathcal{T}_h\}$ puede demostrarse, para $0 \leq s \leq 1$,

$$\|\nabla(u - I_h u)\|_{L^2} \leq C_{int} h^s |u|_{H^{1+s}}$$

En realidad para la interpolación de Lagrange vale si $s > \frac{n}{2} - 1$. Para s menor hay que reemplazar la interpolación de Lagrange por una interpolación de promedios (la interpolación de Lagrange no está definida en H^{1+s} para $s + 1 \leq \frac{n}{2}$ porque no tienen sentido los valores puntuales de u).

ESTIMACIONES DE ERROR Y ORDEN

Juntando ambas estimaciones obtenemos

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq Ch^s |u|_{H^{1+s}} \qquad 0 \leq s \leq 1$$

donde C depende de C_{est} y C_{int}.

Juntando ambas estimaciones obtenemos

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq Ch^s|u|_{H^{1+s}} \qquad 0 \leq s \leq 1$$

donde C depende de C_{est} y C_{int}.

El problema se reduce entonces a tener estimaciones del error de aproximación.

ESTIMACIONES DE ERROR Y ORDEN

Juntando ambas estimaciones obtenemos

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq Ch^s|u|_{H^{1+s}} \qquad 0 \leq s \leq 1$$

donde C depende de C_{est} y C_{int}.

El problema se reduce entonces a tener estimaciones del error de aproximación.

Lo que interesa saber es cómo depende la constante C_{int} de las mallas.

Juntando ambas estimaciones obtenemos

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq Ch^s|u|_{H^{1+s}} \qquad 0 \leq s \leq 1$$

donde C depende de C_{est} y C_{int}.

El problema se reduce entonces a tener estimaciones del error de aproximación.

Lo que interesa saber es cómo depende la constante C_{int} de las mallas.

En particular, tener condiciones sobre la familia de mallas $\{\mathcal{T}_h\}$ que garanticen que C_{int} esté acotada uniformemente, es decir independientemente de h cuando $h \to 0$.

Juntando ambas estimaciones obtenemos

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq Ch^s |u|_{H^{1+s}} \qquad 0 \leq s \leq 1$$

donde C depende de C_{est} y C_{int}.

El problema se reduce entonces a tener estimaciones del error de aproximación.

Lo que interesa saber es cómo depende la constante C_{int} de las mallas.

En particular, tener condiciones sobre la familia de mallas $\{\mathcal{T}_h\}$ que garanticen que C_{int} esté acotada uniformemente, es decir independientemente de h cuando $h \to 0$.

Para esto se han considerado distintos tipos de condiciones sobre las mallas.

MALLAS REGULARES

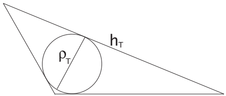
Decimos que una familia de mallas $\{\mathcal{T}_h\}$ es regular (o muchas veces, por abuso de lenguaje, que las mallas son regulares) si existe una constante σ tal que

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h \;, \; \forall h$$

siendo h_T, ρ_T los diámetros de T y una bola contenida en T respectivamente.

Las técnicas clásicas de elementos finitos permiten demostrar que

$$C_{int} \leq C(\sigma)$$



MALLAS NO REGULARES O ANISOTRÓPICAS

Son familias de mallas donde los elementos pueden "achatarse".

MALLAS NO REGULARES O ANISOTRÓPICAS

Son familias de mallas donde los elementos pueden “achatarse”.

Interesan en problemas en los cuales la solución varía más rápido en una dirección que en otra (por ejemplo problemas con capas límites).

Son familias de mallas donde los elementos pueden "achatarse".

Interesan en problemas en los cuales la solución varía más rápido en una dirección que en otra (por ejemplo problemas con capas límites).

Condición de ángulo máximo (en $n = 2$):

$\theta_T =$ ángulo máximo de T
Existe una constante $\alpha < \pi$ tal que

$$\theta_T \leq \alpha \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h \, , \; \forall h$$

MALLAS NO REGULARES O ANISOTRÓPICAS

Son familias de mallas donde los elementos pueden "achatarse".

Interesan en problemas en los cuales la solución varía más rápido en una dirección que en otra (por ejemplo problemas con capas límites).

Condición de ángulo máximo (en $n = 2$):

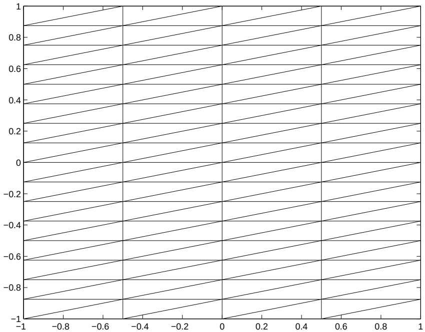
$\theta_T =$ ángulo máximo de T
Existe una constante $\alpha < \pi$ tal que

$$\theta_T \leq \alpha \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h \, , \; \forall h$$

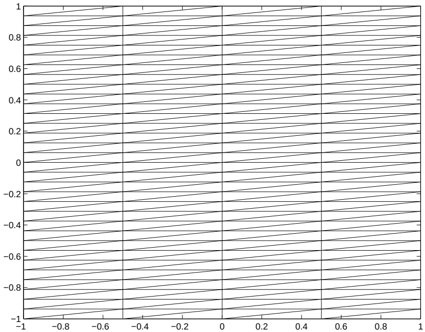
En muchos casos, dependiendo del espacio aproximante y del tipo de interpolación puede verse que

$$C_{int} \leq C(\alpha)$$

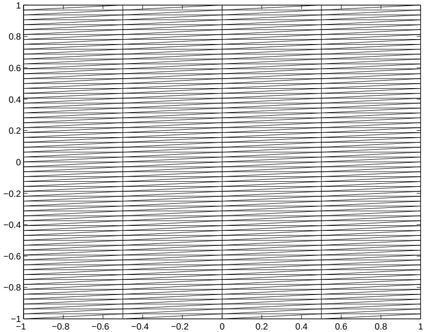
MALLAS NO REGULARES O ANISOTRÓPICAS



MALLAS NO REGULARES O ANISOTRÓPICAS



MALLAS NO REGULARES O ANISOTRÓPICAS



Una condición mucho más restrictiva es la llamada casi-uniformidad de las mallas que se usa en muchas demostraciones. En algunos casos, como veremos, es un problema abierto mejorar las demostraciones para eliminar esta restricción.

MALLAS CASI-UNIFORMES

Una condición mucho más restrictiva es la llamada casi-uniformidad de las mallas que se usa en muchas demostraciones. En algunos casos, como veremos, es un problema abierto mejorar las demostraciones para eliminar esta restricción.

A cada triangulación $\mathcal{T}_h$ le asociamos $h_{max} = \max_{T\in\mathcal{T}_h} h_T$ y $h_{min} = \min_{T\in\mathcal{T}_h} h_T$

Una condición mucho más restrictiva es la llamada casi-uniformidad de las mallas que se usa en muchas demostraciones. En algunos casos, como veremos, es un problema abierto mejorar las demostraciones para eliminar esta restricción.

A cada triangulación $\mathcal{T}_h$ le asociamos $h_{max} = \max_{T\in\mathcal{T}_h} h_T$ y $h_{min} = \min_{T\in\mathcal{T}_h} h_T$

Decimos que una familia de mallas $\{\mathcal{T}_h\}$ es casi-uniforme si existe una constante γ tal que

$$\frac{h_{max}}{h_{min}} \leq \gamma$$

Por ejemplo en L^2: por la desigualdad de Poincaré sale enseguida que

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq Ch^s|u|_{H^{1+s}}$$

Supongamos, para simplificar la notación, que puedo tomar $s = 1$ (o sea que $u \in H^2$), entonces

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq Ch|u|_{H^2}$$

Por ejemplo en L^2: por la desigualdad de Poincaré sale enseguida que

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq Ch^s|u|_{H^{1+s}}$$

Supongamos, para simplificar la notación, que puedo tomar $s = 1$ (o sea que $u \in H^2$), entonces

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq Ch|u|_{H^2}$$

Pero es de esperar un mejor orden de aproximación para u que para sus derivadas. De hecho, para la interpolación de Lagrange se tiene

$$\|u - I_h u\|_{L^2} \leq Ch^2|u|_{H^2}$$

Pero se puede ver que NO vale:

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C \operatorname{dist}_{L^2}(u, V_h)$$

Sin embargo, si Ω es convexo se puede demostrar

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^2 |u|_{H^2}$$

Demostración (Aubin-Nitsche):
Sea $v \in H_0^1(\Omega)$ la solución de $-\Delta v = u - u_h$.
Si Ω es convexo se tiene $\|v\|_{H^2} \leq C\|u - u_h\|_{L^2}$

Sin embargo, si Ω es convexo se puede demostrar

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^2 |u|_{H^2}$$

Demostración (Aubin-Nitsche):
Sea $v \in H_0^1(\Omega)$ la solución de $-\Delta v = u - u_h$.
Si Ω es convexo se tiene $\|v\|_{H^2} \leq C\|u - u_h\|_{L^2}$

$$\|u - u_h\|_{L^2}^2 = \int_\Omega (u - u_h)(-\Delta v) = \int_\Omega \nabla(u - u_h) \cdot \nabla v$$

$$= \int_\Omega \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(v - I_h v) \leq \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \|\nabla(v - I_h v)\|_{L^2}$$

$$\leq Ch\|v\|_{H^2} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq Ch\|u - u_h\|_{L^2} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2}$$

y en consecuencia,

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq Ch^2 |v|_{H^2}$$

En L^∞ es más complicado:

Para Ω convexo y mallas casi-uniformes se puede demostrar la estabilidad

$$\|\nabla u_h\|_{L^\infty} \leq C\|\nabla u\|_{L^\infty}$$

En L^∞ es más complicado:

Para Ω convexo y mallas casi-uniformes se puede demostrar la estabilidad

$$\|\nabla u_h\|_{L^\infty} \leq C\|\nabla u\|_{L^\infty}$$

que combinado con estimación del error de interpolación implica

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^\infty} \leq Ch\|D^2 u\|_{L^\infty}$$

ESTIMACIONES EN OTRAS NORMAS

En L^∞ es más complicado:

Para Ω convexo y mallas casi-uniformes se puede demostrar la estabilidad

$$\|\nabla u_h\|_{L^\infty} \leq C\|\nabla u\|_{L^\infty}$$

que combinado con estimación del error de interpolación implica

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^\infty} \leq Ch\|D^2 u\|_{L^\infty}$$

También se tiene la estimación "casi óptima"

$$\|u - u_h\|_{L^\infty} \leq Ch^2 \log(1/h)\|D^2 u\|_{L^\infty}$$

Y no se puede mejorar (hay contraejemplos). Es decir que el orden de aproximación no es igual al del error de interpolación.

Para aproximación de grado $k > 1$ sí vale el orden óptimo.

PROBLEMAS ABIERTOS EN L^2

- Si Ω no es convexo no se sabe si vale

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^2 \|u\|_{H^2}$$

PROBLEMAS ABIERTOS EN L^2

- Si Ω no es convexo no se sabe si vale

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^2 \|u\|_{H^2}$$

- Introduciendo una función de malla $h(x)$ que indique el tamaño local de los elementos, o sea, $h|_T = h_T$ se ve fácilmente que

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} \leq C\|hD^2 u\|_{L^2}$$

pero no se sabe

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C\|h^2 D^2 u\|_{L^2}$$

PROBLEMAS ABIERTOS EN L^∞

¿Qué pasa si las mallas no son casi-uniformes?

Hay algunos trabajos que demuestran estimaciones con condiciones más débiles, pero no hay un reusltado para mallas regulares en general.

PROBLEMAS ABIERTOS EN L^∞

¿Qué pasa si las mallas no son casi-uniformes?

Hay algunos trabajos que demuestran estimaciones con condiciones más débiles, pero no hay un reusltado para mallas regulares en general.

En $\mathbb{R}^2$ se puede demostrar, para mallas regulares:

$$\|u - u_h\|_{L^\infty} \leq C h_{max} \log(1/h_{min}) \|h D^2 u\|_{L^\infty}$$

Pero no se sabe algo análogo para $\nabla(u - u_h)$ ni en dimensión > 2.

NORMAS CON PESOS

Un peso es una función medible $w \geq 0$.
El espacio $L^p_w(\Omega)$ es el definido por la norma

$$\|f\|^p_{L^p_w} = \int_\Omega |f(x)|^p w(x)dx$$

NORMAS CON PESOS

Un peso es una función medible $w \geq 0$.
El espacio $L^p_w(\Omega)$ es el definido por la norma

$$\|f\|^p_{L^p_w} = \int_\Omega |f(x)|^p w(x) dx$$

Hay diversas motivaciones para utilizar normas con pesos:

Problemas con singularidades, problemas con capas límites, problemas no uniformemente elípticos, etc.

Por ejemplo, consideremos el problema de Poisson donde la fuente es una medida

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu \text{ in } \Omega, \\ \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

En general, este problema no tiene solución en H^1.
Sin embargo, puede resolverse por elementos finitos:
El problema discreto: $u_h \in V_h$

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v = \langle \mu, v \rangle \quad \forall v \in V_h$$

está bien planteado siempre que el lado derecho esté bien definido (lo que sucede en muchos casos porque las funciones aproximantes son mucho mejores que las generales de H^1).

FUENTES SINGULARES

En general, este problema no tiene solución en H^1.
Sin embargo, puede resolverse por elementos finitos:
El problema discreto: $u_h \in V_h$

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v = \langle \mu, v \rangle \quad \forall v \in V_h$$

está bien planteado siempre que el lado derecho esté bien definido (lo que sucede en muchos casos porque las funciones aproximantes son mucho mejores que las generales de H^1).

En muchos casos se puede ver que la solución está en un espacio de Sobolev con peso (veremos después un resultado general).

FUENTES SINGULARES

En general, este problema no tiene solución en H^1.
Sin embargo, puede resolverse por elementos finitos:
El problema discreto: $u_h \in V_h$

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v = \langle \mu, v \rangle \quad \forall v \in V_h$$

está bien planteado siempre que el lado derecho esté bien definido (lo que sucede en muchos casos porque las funciones aproximantes son mucho mejores que las generales de H^1).

En muchos casos se puede ver que la solución está en un espacio de Sobolev con peso (veremos después un resultado general).
Por lo tanto para estimar el error y poder diseñar mallas adecuadas conviene trabajar en normas con pesos

Consideremos, por ejemplo, $\mu = \delta$ (delta de Dirac).

En este caso tenemos que

$$|\nabla u(x)| \sim |x|^{1-n} \notin L^2(\Omega)$$

pero

$$|\nabla u| \in L^2_w(\Omega)$$

si $w(x) = |x|^\alpha$ con $\alpha > n - 2$.

ESTABILIDAD EN NORMAS CON PESOS

Consideremos, por ejemplo, $\mu = \delta$ (delta de Dirac).

En este caso tenemos que

$$|\nabla u(x)| \sim |x|^{1-n} \notin L^2(\Omega)$$

pero

$$|\nabla u| \in L^2_w(\Omega)$$

si $w(x) = |x|^\alpha$ con $\alpha > n-2$.

Si demostramos la estabilidad:

$$\|\nabla u_h\|_{L^2_w(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2_w(\Omega)}$$

podemos deducir, al igual que en caso sin pesos, la estimación de error

$$\|\nabla (u - u_h)\|_{L^2_w(\Omega)} \leq C \|\nabla (u - I_h u)\|_{L^2_w(\Omega)}$$

Es decir que el problema se reduce a obtener buenas estimaciones de error de interpolación en normas con pesos.

ERROR DE INTERPOLACIÓN

Es decir que el problema se reduce a obtener buenas estimaciones de error de interpolación en normas con pesos.

Se pueden demostrar estimaciones del tipo

$$\int_T |\nabla(u - Iu)(x)|^2 |x|^\alpha dx \leq C h_T^{2-\gamma} \int_T |D^2 u(x)|^2 |x|^{\alpha+\gamma} dx$$

y utilizando estas estimaciones y que

$$\int_\Omega |D^2 u(x)|^2 |x|^\beta dx < \infty$$

si $\beta > n$, se pueden diseñar mallas graduadas adecuadas.

Se fija $h > 0$ y se construye la triangulación de tal forma que:

Si $0 \in T$, $h_T^{2-\gamma} = h^2$ y en el resto $h_T^2 \sim h^2|x|^\gamma$.

Se necesita: $\alpha + \gamma > n$, $\alpha > n - 2$, $\gamma < 2$

Basta elegir $\gamma \in (n - \alpha, 2)$.

Se fija $h > 0$ y se construye la triangulación de tal forma que:

Si $0 \in T$, $h_T^{2-\gamma} = h^2$ y en el resto $h_T^2 \sim h^2|x|^\gamma$.

Se necesita: $\alpha + \gamma > n$, $\alpha > n - 2$, $\gamma < 2$

Basta elegir $\gamma \in (n - \alpha, 2)$.

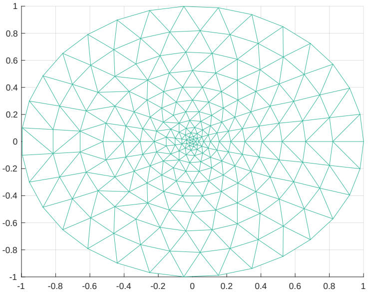
Con este tipo de mallas se obtiene

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2_w(\Omega)} \leq Ch \leq CN^{-1/n}$$

siendo N el número de nodos.

Es decir, orden óptimo respecto de N.

MALLA REGULAR GRADUADA



Análogamente, si consideramos el problema de Poisson con otro tipo de medidas, en muchos casos la solución estará en un espacio de Sobolev con peso.
Por ejemplo, si μ está soportada en un cerrado $F \subset \Omega$, el peso será de la forma d_F^α siendo $d_F(x) = dist(x, F)$.

Análogamente, si consideramos el problema de Poisson con otro tipo de medidas, en muchos casos la solución estará en un espacio de Sobolev con peso.

Por ejemplo, si μ está soportada en un cerrado $F \subset \Omega$, el peso será de la forma d_F^α siendo $d_F(x) = dist(x, F)$.

El análisis de este tipo de problemas utilizando normas con pesos fue iniciado por D'Angelo-Quarteroni quienes consideraron el caso en que μ es una medida soportada en una curva F contenida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

En un caso particular demostraron que el problema continuo está bien planteado en un espacio con peso.

Análogamente, si consideramos el problema de Poisson con otro tipo de medidas, en muchos casos la solución estará en un espacio de Sobolev con peso.

Por ejemplo, si μ está soportada en un cerrado $F \subset \Omega$, el peso será de la forma d_F^α siendo $d_F(x) = dist(x, F)$.

El análisis de este tipo de problemas utilizando normas con pesos fue iniciado por D'Angelo-Quarteroni quienes consideraron el caso en que μ es una medida soportada en una curva F contenida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

En un caso particular demostraron que el problema continuo está bien planteado en un espacio con peso.

Para el problema discreto, D'Angelo "demostró" la estabilidad en un paper publicado en SIAM Numer. Anal. y bastante citado.

Análogamente, si consideramos el problema de Poisson con otro tipo de medidas, en muchos casos la solución estará en un espacio de Sobolev con peso.

Por ejemplo, si μ está soportada en un cerrado $F \subset \Omega$, el peso será de la forma d_F^α siendo $d_F(x) = dist(x, F)$.

El análisis de este tipo de problemas utilizando normas con pesos fue iniciado por D'Angelo-Quarteroni quienes consideraron el caso en que μ es una medida soportada en una curva F contenida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

En un caso particular demostraron que el problema continuo está bien planteado en un espacio con peso.

Para el problema discreto, D'Angelo "demostró" la estabilidad en un paper publicado en SIAM Numer. Anal. y bastante citado. Pero su demostración tiene un error insalvable!!

PROBLEMA CONTINUO

Consideremos el problema

$$\begin{cases} \Delta u = \mu = \mathrm{div}\mathbf{q} & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\mathbf{q} \in L^p_w(\Omega)$, para algún $1 < p < \infty$.

PROBLEMA CONTINUO

Consideremos el problema

$$\begin{cases} \Delta u = \mu = \mathrm{div}\mathbf{q} & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\mathbf{q} \in L^p_w(\Omega)$, para algún $1 < p < \infty$.

Si el peso w está en la clase de Muckenhoupt y Ω es un polígono o poliedro convexo, demostramos que existe única solución que satisface

$$\|\nabla u\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\|\mathbf{q}\|_{L^p_w(\Omega)}.$$

Para esto utilizamos los argumentos de un trabajo conjunto con M. E. Cejas en el cual aplicamos las ideas de la teoría de integrales singulares para demostrar estimaciones a priori con pesos.

PROBLEMA CONTINUO

Las herramientas que se usan son:

- La maximal de Hardy-Littlewood

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|dy,$$

PROBLEMA CONTINUO

Las herramientas que se usan son:

- La maximal de Hardy-Littlewood

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

- La maximal sharp local

$$\mathcal{M}^{\#}_{\Omega} f(x) = \sup_{\Omega \supset Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy,$$

Las herramientas que se usan son:

- La maximal de Hardy-Littlewood

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

- La maximal sharp local

$$\mathcal{M}^{\#}_{\Omega} f(x) = \sup_{\Omega \supset Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy,$$

- Estimaciones de la función de Green.

LAS CLASES A_p

Un peso $w \geq 0$ definido en $\mathbb{R}^n$, está en la clase de Muckenhoupt A_p, $1 < p < \infty$, si

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} =: [w]_{A_p} < \infty$$

Un peso $w \geq 0$ definido en $\mathbb{R}^n$, está en la clase de Muckenhoupt A_p, $1 < p < \infty$, si

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} =: [w]_{A_p} < \infty$$

Otra escritura:
Si llamamos $v = w^{1/p}$

$$\sup_Q \frac{\|v\|_{L^p(Q)} \|v^{-1}\|_{L^{p'}(Q)}}{|Q|} < \infty$$

Un peso $w \geq 0$ definido en $\mathbb{R}^n$, está en la clase de Muckenhoupt A_p, $1 < p < \infty$, si

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} =: [w]_{A_p} < \infty$$

Otra escritura:
Si llamamos $v = w^{1/p}$

$$\sup_Q \frac{\|v\|_{L^p(Q)} \|v^{-1}\|_{L^{p'}(Q)}}{|Q|} < \infty$$

$w \geq 0$ está en la clase A_1 si existe una constante $C =: [w]_{A_1}$ tal que

$$\mathcal{M}w(x) \leq Cw(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Las clases A_p fueron introducidas por Muckenhoupt (1972) quien demostró que, para $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ si y sólo si

$$\int |Mf(x)|^p w(x)dx \leq C \int |f(x)|^p w(x)dx$$

donde C es una constante que depende de $[w]_{A_p}$.

Las clases A_p fueron introducidas por Muckenhoupt (1972) quien demostró que, para $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ si y sólo si

$$\int |Mf(x)|^p w(x)dx \leq C \int |f(x)|^p w(x)dx$$

donde C es una constante que depende de $[w]_{A_p}$.

Después se demostró que la condición también es necesaria y suficiente para la continuidad de las transformadas de Hilbert y de Riesz.

Las clases A_p fueron introducidas por Muckenhoupt (1972) quien demostró que, para $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ si y sólo si

$$\int |Mf(x)|^p w(x)dx \leq C \int |f(x)|^p w(x)dx$$

donde C es una constante que depende de $[w]_{A_p}$.

Después se demostró que la condición también es necesaria y suficiente para la continuidad de las transformadas de Hilbert y de Riesz.

También es suficiente para la continuidad de una clase muy general de integrales singulares.

EJEMPLOS DE PESOS A_p

Para $1 \leq p < \infty$:

$$|x|^\beta \in A_p \iff -n < \beta < n(p-1)$$

EJEMPLOS DE PESOS A_p

Para $1 \leq p < \infty$:

$$|x|^\beta \in A_p \iff -n < \beta < n(p-1)$$

$F \in \mathbb{R}^n$ cerrado de dimensión m, $d_F(x) = dist(x, F)$

$$d_F^\beta \in A_p \iff -(n-m) < \beta < (n-m)(p-1)$$

EJEMPLOS DE PESOS A_p

Para $1 \leq p < \infty$:

$$|x|^\beta \in A_p \iff -n < \beta < n(p-1)$$

$F \in \mathbb{R}^n$ cerrado de dimensión m, $d_F(x) = dist(x, F)$

$$d_F^\beta \in A_p \iff -(n-m) < \beta < (n-m)(p-1)$$

Por ejemplo, si F es una curva en $\mathbb{R}^3$,

$$d_F^\beta \in A_2 \iff -2 < \beta < 2$$

Teorema: Si Ω es un polígono o poliedro convexo, $\mathbf{q} \in L^p_w(\Omega)$, $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, el problema

$$\begin{cases} \Delta u = \mu = \mathrm{div}\mathbf{q} & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene una única solución que satisface

$$\|\nabla u\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\|\mathbf{q}\|_{L^p_w(\Omega)}.$$

PROBLEMA CONTINUO

Teorema: Si Ω es un polígono o poliedro convexo, $\mathbf{q} \in L^p_w(\Omega)$, $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, el problema

$$\begin{cases} \Delta u = \mu = \mathrm{div}\mathbf{q} & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene una única solución que satisface

$$\|\nabla u\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\|\mathbf{q}\|_{L^p_w(\Omega)}.$$

Idea de la demostración:

La solución u está dada por

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) div\, \mathbf{q}(y) dy = -\int_\Omega \nabla_y G(x,y) \cdot \mathbf{q}(y) dy.$$

donde $G(x,y)$ es la función de Green.

PROBLEMA CONTINUO

Usando las estimaciones

$$|\partial_{x_i}\partial_{y_j}G(x,y)-\partial_{x_i}\partial_{y_j}G(\bar{x},y)| \leq C|x-\bar{x}|^{\gamma}(|x-y|^{-n-\gamma}+|\bar{x}-y|^{-n-\gamma})$$

y la estimación conocida

$$\|\nabla u\|_{L^s(\Omega)} \leq C\|\mathbf{q}\|_{L^s(\Omega)} \qquad s > 1$$

PROBLEMA CONTINUO

Usando las estimaciones

$$|\partial_{x_i}\partial_{y_j}G(x,y)-\partial_{x_i}\partial_{y_j}G(\bar{x},y)| \leq C|x-\bar{x}|^{\gamma}(|x-y|^{-n-\gamma}+|\bar{x}-y|^{-n-\gamma})$$

y la estimación conocida

$$\|\nabla u\|_{L^s(\Omega)} \leq C\|\mathbf{q}\|_{L^s(\Omega)} \qquad s > 1$$

se demuestra, para todo $x \in \Omega$,

$$\mathcal{M}_{\Omega}^{\#}(|\nabla u|)(x) \leq C(\mathcal{M}|\mathbf{q}|^s)^{\frac{1}{s}}(x)$$

para cualquier $s > 1$.

PROBLEMA CONTINUO

Usando las estimaciones

$$|\partial_{x_i}\partial_{y_j}G(x,y)-\partial_{x_i}\partial_{y_j}G(\bar{x},y)| \leq C|x-\bar{x}|^{\gamma}(|x-y|^{-n-\gamma}+|\bar{x}-y|^{-n-\gamma})$$

y la estimación conocida

$$\|\nabla u\|_{L^s(\Omega)} \leq C\|\mathbf{q}\|_{L^s(\Omega)} \qquad s>1$$

se demuestra, para todo $x \in \Omega$,

$$\mathcal{M}^{\#}_{\Omega}(|\nabla u|)(x) \leq C(\mathcal{M}|\mathbf{q}|^{s})^{\frac{1}{s}}(x)$$

para cualquier $s > 1$.

Por otra parte se tiene para cualquier $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $w \in A_p$,

$$\|f - f_{\Omega}\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\|\mathcal{M}^{\#}_{\Omega}f\|_{L^p_w(\Omega)}$$

El resultado análogo en $\mathbb{R}^n$ es un resultado clásico. La generalización a Ω dominio acotado fue demostrada por Diening-Ruzicka-Schumacher (2010).

Combinando estas desigualdades (aplicando la última a $f = |\nabla u|$) se obtiene

$$\|\nabla u - (\nabla u)_\Omega\|_{L^p_w(\Omega)} \le C\|\mathcal{M}^\#_\Omega(|\nabla u|)\|_{L^p_w(\Omega)} \le C\|(\mathcal{M}|\mathbf{q}|^s)^{\frac{1}{s}}\|_{L^p_w(\Omega)}$$

Combinando estas desigualdades (aplicando la última a $f = |\nabla u|$) se obtiene

$$\|\nabla u - (\nabla u)_\Omega\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\|\mathcal{M}^{\#}_\Omega(|\nabla u|)\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\|(\mathcal{M}|\mathbf{q}|^s)^{\frac{1}{s}}\|_{L^p_w(\Omega)}$$

Si se pudiera tomar $s = 1$, usando la continuidad con pesos de $\mathcal{M}$ saldría inmediatamente que

$$\|\nabla u - (\nabla u)_\Omega\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\|\mathbf{q}\|_{L^p_w(\Omega)}$$

Combinando estas desigualdades (aplicando la última a $f = |\nabla u|$) se obtiene

$$\|\nabla u - (\nabla u)_\Omega\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\|\mathcal{M}^\#_\Omega(|\nabla u|)\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\|(\mathcal{M}|\mathbf{q}|^s)^{\frac{1}{s}}\|_{L^p_w(\Omega)}$$

Si se pudiera tomar $s = 1$, usando la continuidad con pesos de $\mathcal{M}$ saldría inmediatamente que

$$\|\nabla u - (\nabla u)_\Omega\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\|\mathbf{q}\|_{L^p_w(\Omega)}$$

Como $s > 1$, es más complicado, pero se arregla usando una propiedad fundamental de los pesos A_p:
Si $w \in A_p$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\varepsilon}$.

PROBLEMA CONTINUO

Combinando estas desigualdades (aplicando la última a $f = |\nabla u|$) se obtiene

$$\|\nabla u - (\nabla u)_\Omega\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\|\mathcal{M}^\#_\Omega(|\nabla u|)\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\|(\mathcal{M}|\mathbf{q}|^s)^{\frac{1}{s}}\|_{L^p_w(\Omega)}$$

Si se pudiera tomar $s = 1$, usando la continuidad con pesos de $\mathcal{M}$ saldría inmediatamente que

$$\|\nabla u - (\nabla u)_\Omega\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\|\mathbf{q}\|_{L^p_w(\Omega)}$$

Como $s > 1$, es más complicado, pero se arregla usando una propiedad fundamental de los pesos A_p:
Si $w \in A_p$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\varepsilon}$.
Finalmente $|(\nabla u)_\Omega|$ se acota usando la estimación a priori sin peso en L^s y que $L^p_w(\Omega) \subset L^s(\Omega)$ para algún $s > 1$.

PROBLEMA DISCRETO

Introducimos la solución discreta $u_h \in V_h$

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v = \langle \mu, v \rangle = \int_\Omega \mathbf{q} \cdot \nabla v \quad \forall v \in V_h$$

y, dado un peso w, queremos demostrar la estabilidad, o sea,

$$\|\nabla u_h\|_{L^2_w(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2_w(\Omega)}$$

con una constante independiente de h.

PROBLEMA DISCRETO

Introducimos la solución discreta $u_h \in V_h$

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v = \langle \mu, v \rangle = \int_\Omega \mathbf{q} \cdot \nabla v \quad \forall v \in V_h$$

y, dado un peso w, queremos demostrar la estabilidad, o sea,

$$\|\nabla u_h\|_{L^2_w(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2_w(\Omega)}$$

con una constante independiente de h.

Por ahora sólo lo sabemos hacer para familias de mallas casi-uniformes.

Esta restricción es muy mala para los problemas con singularidades que nos interesan, así que estamos tratando de mejorar este resultado.

PROBLEMA DISCRETO

Nuestro argumento se basa en resultados que fueron obtenidos en la demostración de Rannacher-Scott (1982) de la estabilidad

$$\|\nabla u_h\|_{L^\infty} \leq C\|\nabla u\|_{L^\infty}$$

Rannacher-Scott usan la hipótesis de casi-uniformidad. Posteriormente hay algunos papers que relajan esa hipótesis pero aún no sabemos si esos argumentos pueden servir para nuestro poblema. Que sepamos no se conoce este resultado para familias de mallas regulares.

PROBLEMA DISCRETO

Nuestro argumento se basa en resultados que fueron obtenidos en la demostración de Rannacher-Scott (1982) de la estabilidad

$$\|\nabla u_h\|_{L^\infty} \leq C\|\nabla u\|_{L^\infty}$$

Rannacher-Scott usan la hipótesis de casi-uniformidad. Posteriormente hay algunos papers que relajan esa hipótesis pero aún no sabemos si esos argumentos pueden servir para nuestro poblema. Que sepamos no se conoce este resultado para familias de mallas regulares.

Es interesante observar que el problema que nos interesa está fuertemente relacionado con estimaciones en normas L^p.

PROBLEMA DISCRETO

En efecto, la teoría de extrapolación de Rubio de Francia implica que si

$$\|\nabla u_h\|_{L^2_w(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2_w(\Omega)}$$

para todo $w \in A_1$, con C dependiendo sólo de $[w]_{A_1}$, entonces,

$$\|\nabla u_h\|_{L^p(\Omega)} \leq Cp\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall 2 \leq p < \infty$$

PROBLEMA DISCRETO

En efecto, la teoría de extrapolación de Rubio de Francia implica que si

$$\|\nabla u_h\|_{L^2_w(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2_w(\Omega)}$$

para todo $w \in A_1$, con C dependiendo sólo de $[w]_{A_1}$, entonces,

$$\|\nabla u_h\|_{L^p(\Omega)} \leq Cp\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall 2 \leq p < \infty$$

y un argumento standard en elementos finitos daría

$$\|\nabla u_h\|_{L^\infty} \leq C \log(1/h_{min})\|\nabla u\|_{L^\infty}$$

Es decir que si la estabilidad con pesos A_1 valiera en mallas regulares, se obtendría al menos una estimación casi óptima para este tipo de mallas.

PROBLEMA DISCRETO

Teorema: Sea Ω un polígono convexo o un poliedro con ángulos entre caras menores que $3\pi/4$ y $\{\mathcal{T}_h\}$ casi-uniforme. Si $w \in A_1$ o $w^{-1} \in A_1$ entonces existe una constante C tal que

$$\|\nabla u_h\|_{L^2_w(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2_w(\Omega)}$$

PROBLEMA DISCRETO

Teorema: Sea Ω un polígono convexo o un poliedro con ángulos entre caras menores que $3\pi/4$ y $\{\mathcal{T}_h\}$ casi-uniforme. Si $w \in A_1$ o $w^{-1} \in A_1$ entonces existe una constante C tal que

$$\|\nabla u_h\|_{L^2_w(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2_w(\Omega)}$$

Idea de la demostración: Basta demostrarlo para $w \in A_1$.

Teorema: Sea Ω un polígono convexo o un poliedro con ángulos entre caras menores que $3\pi/4$ y $\{\mathcal{T}_h\}$ casi-uniforme. Si $w \in A_1$ o $w^{-1} \in A_1$ entonces existe una constante C tal que

$$\|\nabla u_h\|_{L^2_w(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2_w(\Omega)}$$

Idea de la demostración: Basta demostrarlo para $w \in A_1$.

Luego, para w^{-1} sale por dualidad y usando la estimación a priori del caso continuo.

Teorema: Sea Ω un polígono convexo o un poliedro con ángulos entre caras menores que $3\pi/4$ y $\{\mathcal{T}_h\}$ casi-uniforme. Si $w \in A_1$ o $w^{-1} \in A_1$ entonces existe una constante C tal que

$$\|\nabla u_h\|_{L^2_w(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2_w(\Omega)}$$

Idea de la demostración: Basta demostrarlo para $w \in A_1$.

Luego, para w^{-1} sale por dualidad y usando la estimación a priori del caso continuo.

Rannacher-Scott demostraron que existen C y $\lambda > 0$ tales que, para cualquier $z \in \Omega$,

$$|\nabla u_h(z)|^2 \leq C\left\{\left(\frac{1}{h^n}\int_{B(z,h)}|\nabla u(x)|dx\right)^2 + \int_\Omega \frac{h^\lambda}{(|x-z|^2+h^2)^{\frac{n+\lambda}{2}}}|\nabla u(x)|^2 dx\right\},$$

Multiplicando por $w(z)$ e integrando en z y usando

$$\int_\Omega \frac{h^\lambda w(z)}{(|x-z|^2+h^2)^{\frac{n+\lambda}{2}}}dz \le C\mathcal{M}w(x)$$

obtenemos

$$\int_\Omega |\nabla u_h|^2 w \le C\left\{\int_\Omega \mathcal{M}(|\nabla u|)^2 w + \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathcal{M}w\right\}$$

y por lo tanto, usando la definición de A_1 y que $A_1 \subset A_2$,

$$\|\nabla u_h\|_{L^2_w(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L^2_w(\Omega)}.$$

Recordemos que nos interesaba demostrar la estabilidad para pesos de la forma d_F^β con $d_F(x) = dist(x, F)$ y $\dim F = m$.

Recordemos que nos interesaba demostrar la estabilidad para pesos de la forma d_F^β con $d_F(x) = dist(x, F)$ y $\dim F = m$.

$$d_F^\beta \in A_1 \iff -(n-m) < \beta \leq 0$$

Recordemos que nos interesaba demostrar la estabilidad para pesos de la forma d_F^β con $d_F(x) = dist(x, F)$ y $\dim F = m$.

$$d_F^\beta \in A_1 \iff -(n-m) < \beta \leq 0$$

Esto no nos serviría porque nos interesan potencias positivas.

APLICACIÓN AL PROBLEMA DE POISSON

Recordemos que nos interesaba demostrar la estabilidad para pesos de la forma d_F^β con $d_F(x) = dist(x, F)$ y $\dim F = m$.

$$d_F^\beta \in A_1 \iff -(n-m) < \beta \leq 0$$

Esto no nos serviría porque nos interesan potencias positivas. Pero la estabilidad vale también para el peso inverso, o sea que tenemos

$$\int_\Omega |\nabla u_h|^2 d_F^\beta \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 d_F^\beta$$

para $-(n-m) < \beta < (n-m)$

APLICACIÓN AL PROBLEMA DE POISSON

Recordemos que nos interesaba demostrar la estabilidad para pesos de la forma d_F^β con $d_F(x) = dist(x, F)$ y $\dim F = m$.

$$d_F^\beta \in A_1 \iff -(n-m) < \beta \leq 0$$

Esto no nos serviría porque nos interesan potencias positivas. Pero la estabilidad vale también para el peso inverso, o sea que tenemos

$$\int_\Omega |\nabla u_h|^2 d_F^\beta \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 d_F^\beta$$

para $-(n-m) < \beta < (n-m)$

Es decir que, aunque no demostramos la estabilidad para cualquier peso en A_2, esta vale para todas las potencias de d_F que estén en A_2.

ERROR DE INTERPOLACIÓN

Consideremos el caso $n = 2$. Si $n \geq 3$ es más complicado porque hay que trabajar con interpolaciones de promedios en lugar que con la de Lagrange.

Consideremos el caso $n = 2$. Si $n \geq 3$ es más complicado porque hay que trabajar con interpolaciones de promedios en lugar que con la de Lagrange.

Un resultado básico para las estimaciones del error de interpolación es la desigualdad de Poincaré.

Para $w \in A_p$ y T un triángulo se sabe (Fabes-Kenig-Serapioni)

$$\|v - v_T\|_{L^p_w(T)} \leq C h_T \|\nabla v\|_{L^p_w(T)}$$

Consideremos el caso $n = 2$. Si $n \geq 3$ es más complicado porque hay que trabajar con interpolaciones de promedios en lugar que con la de Lagrange.

Un resultado básico para las estimaciones del error de interpolación es la desigualdad de Poincaré.

Para $w \in A_p$ y T un triángulo se sabe (Fabes-Kenig-Serapioni)

$$\|v - v_T\|_{L^p_w(T)} \leq Ch_T \|\nabla v\|_{L^p_w(T)}$$

Desigualdad de Poincaré generalizada:

Para ℓ lado de T

$$\|v - v_\ell\|_{L^p_w(T)} \leq Ch_T \|\nabla v\|_{L^p_w(T)}$$

Para demostrarla tenemos que acotar $|v_\ell - v_T|$.

$$v_\ell - v_T = \frac{1}{|\ell|}\int_\ell (v - v_T)$$

Para demostrarla tenemos que acotar $|v_\ell - v_T|$.

$$v_\ell - v_T = \frac{1}{|\ell|} \int_\ell (v - v_T)$$

Aplicando el teorema de trazas

$$\|v - v_T\|_{L^1(\ell)} \le C \frac{|\ell|}{|T|} \left\{ \|v - v_T\|_{L^1(T)} + h_T \|\nabla (v - v_T)\|_{L^1(T)} \right\}$$

y la desigualdad de Poincaré obtenemos

$$|v_\ell - v_T| \le C \frac{h_T}{|T|} \|\nabla v\|_{L^1(T)}$$

ERROR DE INTERPOLACIÓN

$$\|v_T - v_\ell\|_{L^p_w(T)} \le \left(\int_T w\right)^{1/p} |v_T - v_\ell| \le C \left(\int_T w\right)^{1/p} \frac{h_T}{|T|} \|\nabla v\|_{L^1(T)}$$

$$\|v_T - v_\ell\|_{L^p_w(T)} \le \left(\int_T w\right)^{1/p} |v_T - v_\ell| \le C \left(\int_T w\right)^{1/p} \frac{h_T}{|T|} \|\nabla v\|_{L^1(T)}$$

y por desigualdad de Hölder,

$$\|v_T - v_\ell\|_{L^p_w(T)} \le C \left(\frac{1}{|T|}\int_T w\right)^{1/p} \left(\frac{1}{|T|}\int_T w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{1/p'} h_T \|\nabla v\|_{L^p_w(T)}$$

por lo tanto, como $w \in A_p$ y usando la condición de regularidad de las mallas,

$$\|v_T - v_\ell\|_{L^p_w(T)} \le C h_T \|\nabla v\|_{L^p_w(T)}$$

y por desigualdad triangular

$$\|v - v_\ell\|_{L^p_w(T)} \le C h_T \|\nabla v\|_{L^p_w(T)}$$

ERROR DE INTERPOLACIÓN

Consideremos la interpolación de Lagrange Iu en el triángulo T ($Iu \in \mathcal{P}_1$, $Iu = u$ en los vértices de T).

Consideremos la interpolación de Lagrange Iu en el triángulo T ($Iu \in \mathcal{P}_1$, $Iu = u$ en los vértices de T).

Aplicando la desigualdad de Poincaré generalizada a

$$v = \frac{\partial(u - Iu)}{\partial \ell}$$

obtenemos, para $w \in A_p$,

$$\left\| \frac{\partial(u - Iu)}{\partial \ell} \right\|_{L^p_w(T)} \leq C h_T \left\| \nabla \frac{\partial u}{\partial \ell} \right\|_{L^p_w(T)}$$

Consideremos la interpolación de Lagrange Iu en el triángulo T ($Iu \in \mathcal{P}_1$, $Iu = u$ en los vértices de T).

Aplicando la desigualdad de Poincaré generalizada a

$$v = \frac{\partial(u - Iu)}{\partial \ell}$$

obtenemos, para $w \in A_p$,

$$\left\| \frac{\partial(u - Iu)}{\partial \ell} \right\|_{L^p_w(T)} \leq Ch_T \left\| \nabla \frac{\partial u}{\partial \ell} \right\|_{L^p_w(T)}$$

En consecuencia,

$$\|\nabla(u - Iu)\|_{L^p_w(T)} \leq Ch_T \|D^2 u\|_{L^p_w(T)}$$

MUCHAS GRACIAS!