Desigualdades mejoradas con el Laplaciano fraccionario y existencia de minimizantes para la desigualdad de Stein-Weiss..

Pablo L. De Nápoli

Trabajo en conjunto con Irene Drelichman y Ariel Salort

Aparecerá en Communications in Contemporary Mathematics.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
IMAS - Conicet
Argentina

Seminario de cuaciones Diferenciales y Análisis Numérico (SEDAN) - 8/5/2018

Parte I

Introducción: Algunas desigualdades clásicas

Potencias Fraccionarias del Laplaciano

En esta conferencia, trabajaremos con potencias positivas y negativas del Laplaciano en $\mathbb{R}^n$. Pueden definirse por medio de la transformada de Fourier (que "diagonaliza" al Laplaciano)

$$\widehat{(-\Delta)^{s/2}u}(\omega) = |\omega|^s \, \widehat{u}(\omega)$$

(para funciones "buenas" function, en la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)

Recordamos que tenemos la representaciones integrales:

$$(-\Delta)^{-s/2} f(x) = I_s(f) = c(n,s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-s}} \, dy \quad 0 < s < n.$$

(Potencial de Riesz o Integral Fraccionaria)

$$(-\Delta)^{s/2} u(x) = c(n,s) \text{ V.P. } \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+s}} \, dy \quad 0 < s < 2$$

La desigualdad de Stein-Weiss

Teorema (E. Stein-G-Weiss, J. Math. Mech, 1958)

Supongamos que
$n \geq 1, 0 < s < n, 1 < p \leq r < \infty, \alpha < \frac{n}{p'}, \gamma > -\frac{n}{r}, \alpha \geq \gamma$, *y*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha - \gamma - s}{n}.$$

Entonces,

$$\| |x|^{\gamma} (-\Delta)^{-s/2} f \|_{L^r} \leq C \| |x|^{\alpha} f \|_{L^p} \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n, |x|^{\alpha p}).$$

$$\text{Aquí} \quad \| |x|^{\alpha} f \|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p |x|^{\alpha p} \, dx \right)^{1/p}$$

es una norma L^p con peso de tipo potencia. Resultados con pessos más generales fueron dados por Sawyer y Wheeden (1992).

Algunas observaciones importantes sobre la desigualdad de Stein-Weiss

- La desigualdad de Stein-Weiss tiene invariancia por reescale. La condición
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha - \gamma - s}{n}$$
surge de esta invariancia.
- En el caso sin pesos, $\alpha = \gamma = 0$, la desigualdad de Stein-Weiss se reduce a la desigualdad de Hardy-Litlewood-Sobolev. En ese caso,
$$r = \frac{np}{n - sp}$$
es el clásico exponente crítico de Sobolev.

Formulación equivalente como una desigualdad de Sobolev

Podemos reescribir la desigualdad de Stein-Weiss como una desigualdad de Sobolev fraccionaria con pesos, a saber:

$$\| |x|^{\gamma} u \|_{L^r} \leq C \, \| |x|^{\alpha} (-\Delta)^{s/2} u \|_{L^p} \quad \forall u \in \dot{H}^{s,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$$

Esto significa que tenemos una inmersión continua

$$\dot{H}^{s,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) \subset L^r(\mathbb{R}^n, |x|^{\gamma r})$$

donde

$$\dot{H}^{s,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) = \{ u = (-\Delta)^{-s/2} f : f \in L^p(\mathbb{R}^n, |x|^{\alpha p}) \}$$

es un espacio de Sobolev fraccionario con pesos de tipo potencial. Es un espacio de Banach con la norma $\|u\|_{\dot{H}^{s,p}_{\alpha}} = \|f|x|^{\alpha}\|_{L^p}$.

Parte II

Resultados sobre la existencia de extremales

Sobre la existencia de extremales

- La mejor constante en la desigualdad de Stein-Weiss es por definición:

$$S = \sup \frac{\| |x|^\gamma (-\Delta)^{-s/2} f \|_{L^r}}{\| |x|^\alpha f \|_{L^p}}$$

  donde el supremo se toma sobre todas las funciones no nulas $f \in L^p(\mathbb{R}^n, |x|^{\alpha p})$.

- La existencia de extremales para la desigualdad de Stein-Weiss fue demostrada por E. Lieb (Ann. of Math., 1983) bajo las condiciones adicionales:

$$p < r, \alpha \geq 0, \gamma \leq 0.$$

  Las restricciones de signo en los exponentes en su resultado provienen del hecho de que su argumento esta basdo en una técnica de simetrización (reordenamiento).

Sobre la existencia de extremales (2)

- Los valores de la constante S y los maximizantes sólo se conocen explícitamente en casos muy particulares. E. Lieb en el mismo trabajo de 1983 los encuentra para el caso sin pesos ($\alpha = \gamma = 0$).

- W. Beckner (Proceedings of the AMS, 2008) encuentra la mejores constante S en el caso diagonal $p = r$. En este caso no hay funciones extremales.

  En este trabajo, W. Beckner también da una interesante prueba de la desigualdad de Stein-Weiss que usa una estructura de convolución en la variedad $\mathbb{R}_+ \times S^{n-1}$. Cuando $p \neq r$ no permite saber el valor exacto de la constante óptima S (aunque sí se tiene una cota expresada por una integral).

Nuestro resultado principal

Para el caso $p = 2$ pudimos probar el siguiente resultado, que mejora (parcialmente) el resultado de E. Lieb:

Teorema

Supongamos que $n \geq 2$, $0 < s < \frac{n}{2}$, $2 < r < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{2}$, $-\frac{n}{r} < \gamma < \alpha$ *y que se verifica la relación*

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{2} = \frac{\alpha - \gamma - s}{n}$$

Entonces existe un maximizante para

$$S = \sup \frac{\||x|^{\gamma}(-\Delta)^{-s/2} f\|_{L^r}}{\||x|^{\alpha} f\|_{L^p}}$$

(es decir: un extremal para la desigualdad de Stein-Weiss).

Ideas Principales de la Demostración

- Quremos usar el método directo del cálculo de variaciones. Y evitar usar reordenamientos.
- Sin embargo, si (f_n) es una sucesión maximizante para S, es decir.:

$$\| |x|^{\alpha} f_k \|_{L^2} = 1 \quad \text{y} \quad \| |x|^{\gamma} (-\Delta)^{-s/2} f_k \|_{L^r} \to S$$

(f_n) puede no tener ninguna sub-sucesión convergente (incluso débilmente convergente), debido a la invariancia por reescale de la desigualdad.

Ideas Principales de la Demostración (2)

- Sin embargo, usaremos un argumento de compacidad por concentración: mostraremos que si hacemos un reescale adecuado

$$\tilde{f}_k(x) = t_k^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}+\alpha)}\, f_k(t_k^{\frac{1}{2}} x),$$

  (donde (t_k) es una sucesión en $\mathbb{R}_+$ que vamos a elegir), obtenemos otra sucesión maximizante $(\tilde{f}_k)$ que admite una sub-sucesión con un límite débil no nulo.

$$\tilde{f}_k \rightharpoonup g \quad \text{débilmente en } L^2(\mathbb{R}^n, |x|^{2\alpha}) \text{ con } g \not\equiv 0$$

  Entonces, se prueba que g es un maximizante usando el método de la masa faltante.
- El punto crucial es, ¿cómo podemos elegir t_k para que valgan estas propiedades?
- Para hacerlo, utilizaremos un enfoque basado en una desigualdad de Stein-Weiss mejorada.

Parte III

Espacios funcionales y Resultados de Compacidad

El semigroupo del calor y la seminorma de Besov

Nuestra desigualdad mejorada usa una seminorma de Besov de suavidad negativa. Para definirla, utilizaremos el semigrupo del calor (Flett, 1971). Recordamos que está dado por

$$e^{t\Delta} f(x_0) = f * h_t(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) h_t(x_0 - x)\, dx$$

donde

$$h_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left\{ -\frac{|x|^2}{4t} \right\}$$

es el núcleo del calor.

Para cada $\delta > 0$ podemos definir el espacio de Besov homogéneo $\dot{B}^{-\delta}_{\infty,\infty}$ como el espacio de las distribuciones temperadas f en $\mathbb{R}^n$ para las cuales

$$\|u\|_{\dot{B}^{-\delta}_{\infty,\infty}} := \sup_{t>0} \ t^{\delta/2} \|e^{t\Delta} f\|_{L^\infty} < \infty$$

Lemma (R. Lucà,2014)

Supongamos que $n \geq 2$, $1 \leq p \leq +\infty$,

$$0 < \alpha < \frac{n}{p'}$$

y fijemos $t > 0$. *Entonces*

$$|e^{t\Delta} f(x_0)| \leq C\ t^{-\frac{1}{2}(\frac{n}{p}+\alpha)} \| |x|^\alpha f \|_{L^p},$$

y

$$|\partial_{x_j} e^{t\Delta} f(x_0)| \leq C\ t^{-\frac{1}{2}(\frac{n}{p}+\alpha+1)} \| |x|^\alpha f \|_{L^p} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

para cualquier x_0 *y cualquier* $f \in L^p(\mathbb{R}^n, |x|^{\alpha p})$.

- Consecuencia: Para cada $t > 0$ fijo, el operador $e^{t\Delta}$ es compacto como operador de $L^p(\mathbb{R}^n, |x|^{\alpha p})$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Inmersiones de los espacios de Sobolev con pesos en espacios de Besov con suavidad negativa

Corolario

Tenemos una inmersión continua

$$L^p(\mathbb{R}^n, |x|^{\alpha p}) \subset \dot{B}^{-\mu-s}_{\infty,\infty}$$

con

$$\mu = \frac{n}{p} + \alpha - s$$

siempre que $\mu > 0$ *y* $0 < \alpha < \frac{n}{p'}$. *Por la propiedad de levantamiento de los espacios de Besov, esto implica que:*

$$\dot{H}^{s,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^{-\mu}_{\infty,\infty}.$$

Un teorema de compacidad local para los espacios de Sobolev con pesos

Teorema

Supongamos que $n \geq 1$, $0 < s < n$, $1 < p \leq q < \infty$. *Supongamos además que* α, β *y* s *satisfacen las condiciones*

$$\beta > -\frac{n}{q}, \qquad \alpha < \frac{n}{p'}, \qquad \alpha \geq \beta \tag{1}$$

y

$$\alpha + \frac{n}{p} > s > \frac{n}{p} - \frac{n}{q} + \alpha - \beta > 0. \tag{2}$$

Entonces, para cualquier conjunto compacto $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$, *tenemos la inmersión compacta*

$$\dot{H}^{s,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathcal{K}, |x|^{\beta q}). \tag{3}$$

Parte IV

Una desigualdad de Stein-Weiss mejorada

¿Qué es una desigualdad de Stein-Weiss mejorada ?

Buscamos un espacio de Banach X tal que

$$\dot{H}^{s,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) \subset X \quad \text{(continuously)}$$

y tal que para algún θ con $0 < \theta < 1$ tengamos que

$$\| |x|^{\gamma} u \|_r \leq C \, \|u\|^{\theta}_{\dot{H}^{s,p}_{\alpha}} \|u\|^{1-\theta}_{X}$$

(bajo las mismas condiciones del teorema de Stein-Weiss.)

Vemos que una desigualdad de este tipo implica la desigualdad de Stein-Weiss

$$\| |x|^{\gamma} u \|_r \leq C \, \|u\|_{\dot{H}^{s,p}_{\alpha}}$$

Nuestra desigualdad de Stein-Weiss mejorada

Probamos una desigualddad mejorada con $X =$ un espacio de Besov.

Teorema

Supongamos que $n \geq 2$, $0 < s < n$, $1 < p \leq r$, $\alpha < \frac{n}{p'}$, $-\gamma < \frac{n}{r}$, $\alpha - \frac{\gamma}{\theta} \geq 0$, $\mu > 0$, $\text{máx}\{\frac{p}{r}, \frac{\mu}{\mu+s}\} \leq \theta \leq 1$, *y*

$$\gamma + \frac{n}{r} = \theta\left(\alpha + \frac{n}{p} - s\right) + (1-\theta)\mu. \tag{4}$$

Entonces, para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n, |x|^{\alpha p}) \cap \dot{B}^{-\mu-s}_{\infty,\infty}$ *se cumple que:*

$$\||x|^\gamma (-\Delta)^{-s/2} f\|_{L^r} \leq C \, \||x|^\alpha f\|^{\theta}_{L^p} \, \|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\mu-s}_{\infty,\infty}}$$

o, equivalentemente, para toda $u \in \dot{H}^{s,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) \cap \dot{B}^{-\mu}_{\infty,\infty}$

$$\||x|^\gamma u\|_{L^r} \leq C \, \||x|^\alpha (-\Delta)^{s/2} u\|^{\theta}_{L^p} \, \|u\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\mu}_{\infty,\infty}}.$$

Algunas referencias a trabajos anteriores

En el caso sin pesos ($\alpha = \gamma = 0$), desigualdades de este tipo fueron demostradas por:

- P.Gerard, Y. Meyer y F. Oru (1997) (con $X =$ un espacio de Besov).
- D. Chamorro (2006) (en grupos de Lie estratificados).
- R. Frank y E. Lieb (2012) (La aplican a un argumento de compacidad en el grupo de Heisenberg.)
- G. Palatucci y A. Pisante (2014) (con X= un espacio de Morrey)

En el caso con pesos

- H. Bahouri, J. Chemin, y I. Gallagher probaron desigualdades de Hardy mejoradas (2005).
- J. Yang (2015) también demostró una desigualdad para el caso con pesos donde X es un espacio de Morrey.

Ideas principales de la prueba de la desigualdad mejorada

- Usamos la representación como una transformada gamma del semigrupo del calor:

$$u = (-\Delta)^{-s/2} f = \frac{1}{\Gamma(s/2)} \int_0^\infty t^{s/2-1} e^{t\Delta} f \, dt$$

  y la partimos en dos partes ($t \leq T$ y $t > T$).

- La parte con t pequeño se acota usando la desigualdad de Stein-Weiss y la acotación en L^p con pesos A_p de la función maximal de Hardy-Litlewood (según el caso).

- La parte con t se acota usando la definición de la norma Besov de suavidad negativa.

- Finalmente, optimizamos T para obtener la estimación deseada.

Un resultado análogo para el caso local

También tenemos un resultado para el caso local. Se deduce del caso $s = 1$ del anterior, usando las propiedades de las transformadas de Riesz.

Teorema

Supongamos que $n > 1$, $1 < p \leq r$, $\alpha < \frac{n}{p'}$, $-\frac{n}{r} < \gamma < \frac{n}{r'}$, $\alpha - \frac{\gamma}{\theta} \geq 0$, $\mu > 0$, $\max\{\frac{p}{r}, \frac{\mu}{\mu+1}\} \leq \theta \leq 1$, *and*

$$\gamma + \frac{n}{r} = \theta\Big(\alpha + \frac{n}{p} - 1\Big) + (1-\theta)\mu.$$

Entonces, para toda $u \in \dot{H}^{1,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{B}^{-\mu}_{\infty,\infty}$

$$\||x|^{\gamma} u\|_{L^r} \leq C \, \||x|^{\alpha} \nabla u\|^{\theta}_{L^p} \, \|u\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\mu}_{\infty,\infty}}.$$

Este resultado puede verse como una mejora de las desigualdades de Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities en algunos casos.

Parte V

Volviendo a la prueba de la existencia de maximizantes de la desigualdad de Stein-Weiss Inequality

El argumento de compacidad por concentración (1)

Recordamos que comenzamos con una sucesión maximizante, esto es: tal que

$$\| |x|^{\alpha} f_k \|_{L^2} = 1 \quad \text{y} \quad \| |x|^{\gamma} (-\Delta)^{-s/2} f_k \|_{L^r} \to S$$

Poniendo $\mu = \frac{n}{2} + \alpha - s$, la inmersión en los espacios de Besov y nuestra desigualdad de Stein-Weiss mejorada dan que

$$C_1 \leq \| f_k \|_{\dot{B}^{-\mu-s}_{\infty,\infty}} \leq C_2$$

para dos constantes $0 < C_1 < C_2$. Esto significa en particular que:

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\mu+s}{2}} \| e^{t\Delta} f_k \|_{L^{\infty}} \geq C_1 > 0.$$

El argumento de compacidad por concentración (2)

Consecuentemente, para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $t_k > 0$ tal que

$$t_k^{\frac{\mu+s}{2}} \|e^{t_k \Delta} f_k\|_{L^\infty} \geq \frac{C_1}{2} > 0.$$

Ahora ponemos

$$\tilde{f}_k(x) = t_k^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}+\alpha)} f_k(t_k^{\frac{1}{2}} x), \tag{5}$$

Entonces todavía tenemos que $(\tilde{f}_k)$ es una sucesión maximizante, pero ahora debido al reescale parabólico

$$\|e^{1.\Delta} \tilde{f}_k\|_{L^\infty} \geq \frac{C_1}{2}$$

(¡donde ahora tenemos un tiempo fijo $t = 1$!)

El argumento de compacidad por concentración (3)

Por reflexividad, existe $g \in L^2(\mathbb{R}^n, |x|^{2\alpha})$ y una subsucesión que seguiremos notando $\tilde{f}_k$ tal que

$$\tilde{f}_k \rightharpoonup g \quad \text{débilmente en } L^2(\mathbb{R}^n, |x|^{2\alpha}). \tag{6}$$

Entonces la compacidad del operador $e^{1.\Delta}$ (previamente demostrada) implica que

$$e^{1.\Delta}\tilde{f}_k \to e^{1.\Delta}g \qquad \text{en sentido fuerte en } \ L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

y entonces $g \not\equiv 0$, pues

$$\|e^{1.\Delta}g\|_{L^\infty} \geq \frac{C_1}{2} > 0.$$

El argumento de compacidad por concentración (4)

Finalmente el método de la masa faltante (debido a E. Lieb, 1983) implica que cualquier límite débil no nulo g de una sucesión maximizante debe ser un maximizante. Las principales herramientas son:

- Nuestro resultado sobre la compacidad local de la inmersión.
- El lema de Brezis-Lieb.
- La desigualdad de convexidad elemental

$$a^{\frac{r}{2}} + b^{\frac{r}{2}} \leq (a+b)^{\frac{r}{2}}$$

  (y el hecho de que es estricta a menos que $a = 0$ o $b = 0$).

El argumento sólo funciona para $p = 2$ (¡Nos encantaría remover esta restricción!).

Parte VI

El Método de la masa faltante, en detalle

Paso 1: convergencia puntual

Llamamos

$$u_k := I_s(\tilde{f}_k), \quad w := I_s(g)$$

de modo que

$$(-\Delta)^{s/2} u_k = \tilde{f}_k, \quad (-\Delta)^{s/2} w = g$$

Por nuestro resultado de compacidad local con $2 < q < r$ y $\alpha = \beta$, para cualquier compacto K tenemos la inmersión compacta

$$\dot{H}^{s,2}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(K)$$

lo cual implica que pasando a una subsucesión podemos asumir que

$$u_k \to w \quad \text{en sentido fuerte en } L^q(K)$$

y, entonces, pasando a una subsucesión, $u_k \to w$ en c.t.p. en K. Usando un argumento diagonal obtenos pasando a una subsucesión que

$$u_k \to w \quad \text{en c.t.p. de } \mathbb{R}^n.$$

Step 2: Separación de masa

Probemos que g es un maximizamte:

Como $u_k \to w$ a.e. $\mathbb{R}^n$, el lema de Brezis-Lieb Lemma implica que tenemos una separación de masa en el límite

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u_k|^r |x|^{r\gamma}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |w|^r |x|^{r\gamma}\, dx + \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u_k - w|^r |x|^{r\gamma}\, dx.$$

De modo similar, como $\tilde{f}_k \rightharpoonup g$ débilmente en $L^2(\mathbb{R}^n, |x|^{2\alpha})$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g|^2 |x|^{2\alpha}\, dx + \limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}_k - g|^2 |x|^{2\alpha}\, dx = \limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}_k|^2 |x|^{2\alpha}\, dx = 1$$

Esto sólo funciona para $p = 2$.

Step 3: ¡No hay realmente pérdida de masa!

Ahora usamos la desigualdad elemental

$$a^{\frac{r}{2}} + b^{\frac{r}{2}} \leq (a+b)^{\frac{r}{2}} \tag{7}$$

para $a, b \geq 0$ y $r > 2$, tenemos que

$$\begin{aligned} S^r &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u_k|^r |x|^{r\gamma}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |w|^r |x|^{r\gamma}\, dx + \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u_k - w|^r |x|^{r\gamma}\, dx \\ &\leq S^r \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^2 |x|^{2\alpha}\, dx \right)^{\frac{r}{2}} + S^r \left(\limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}_k - g|^2 |x|^{2\alpha}\, dx \right)^{\frac{r}{2}} \\ &\color{red}{\leq} S^r \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^2 |x|^{2\alpha}\, dx + \limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}_k - g|^2 |x|^{2\alpha}\, dx \right)^{\frac{r}{2}} = S^r, \end{aligned}$$

Observamos que (7) es una desigualdad estricta salvo si $a = 0$ o $b = 0$. Entonces, todas las desigualdades son de hecho, igualdades. Como $g \neq 0$, obtenemos que $\| |x|^\alpha g \|_{L^2} = 1$ y que $\tilde{f}_k \to g$ en sentido fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n, |x|^{2\alpha})$.

Step 4: Final de la demostración

Hemos visto que $\tilde{f}_k \to g$ en sentido fuerte en $L^2(\mathbb{R}^n, |x|^{2\alpha})$ Como $(\tilde{f}_k)$ era una sucesión maximizante, tenemos que

$$\||x|^\gamma I_s(\tilde{f}_k)\|_{L^r} \to S$$

Por el teorema de Stein-Weiss Theoem, I_s es un operador continuo de $L^2(\mathbb{R}^n, |x|^{2\alpha})$ en $L^r(\mathbb{R}^n, |x|^{\gamma r})$, entonces

$$u_k \to w \quad \text{en sentido fuerte en } L^r(\mathbb{R}^n, |x|^{\gamma r})$$

o sea:

$$I_s(\tilde{f}_k) \to I_s(g) \quad \text{en sentido fuerte en } L^r(\mathbb{R}^n, |x|^{\gamma r})$$

Concluimos que

$$\||x|^\gamma I_s(g)\|_{L^r} = S$$

y como ya sabemos que $\||x|^\alpha g\|_{L^2} = 1$, Esto significa que g es un maximizante para la desigualdad de Stein-Weiss inequality. La prueba está ahora completa.

The End

¡MUCHAS GRACIAS!