Un problema de frontera libre de tipo Stefan con difusión no local

C. Cortázar, F. Quirós, N. Wolanski

Seminario de PDEs y Análisis Numérico
Universidad de Buenos Aires
5 de Junio de 2018

Problema de Stefan clásico

Se trata de un problema de frontera libre para la ecuación del calor:

- $u \geq 0$ y $u_t - \Delta u = 0 \quad$ en $\{u > 0\}$.
- $u = 0$ y $\dot{s} = |\nabla u| \quad$ en "la frontera libre" $\partial\{u > 0\}$.

  $\dot{s}(t)$ es la velocidad de avance de la frontera libre en la dirección normal.
- A esto se agregan condiciones iniciales y, en caso de plantearlo en un dominio con borde, condiciones de borde.

Problema de Stefan clásico

- Inicialmente se planteó como un modelo para describir cómo se derrite una barra de hielo que se encuentra a temperatura 0.

Problema de Stefan clásico

- Inicialmente se planteó como un modelo para describir cómo se derrite una barra de hielo que se encuentra a temperatura 0.
- Se usa para modelar el cambio de fase de otros fluídos que pueden estar tanto en fase líquida como sólida.

Problema de Stefan clásico

- Inicialmente se planteó como un modelo para describir cómo se derrite una barra de hielo que se encuentra a temperatura 0.
- Se usa para modelar el cambio de fase de otros fluídos que pueden estar tanto en fase líquida como sólida.
- Más recientemente se ha utilizado para describir el avance de una población sobre una región hostil. Se considera que en el proceso de colonización parte de la población muere en proporción al crecimiento de la región ocupada.

  Bunting, G.; Du, Y.; Krakowski, K. *Spreading speed revisited: analysis of a free boundary model* Netw. Heterog. Media 7 (2012), no. 4, 583–603.

Este es el tipo de problema en el que estamos pensando

Otras formulaciones del problema de Stefan

- El problema de Stefan clásico tiene la dificultad intrínseca de que una frontera inicialmente regular puede desarrollar singularidades.

Otras formulaciones del problema de Stefan

- El problema de Stefan clásico tiene la dificultad intrínseca de que una frontera inicialmente regular puede desarrollar singularidades.

  Dibujo

- Esto ha llevado a buscar una forma de planteo del problema que no requiera a priori de la regularidad de la frontera libre.

Otras formulaciones del problema de Stefan

- El problema de Stefan clásico tiene la dificultad intrínseca de que una frontera inicialmente regular puede desarrollar singularidades.

  Dibujo

- Esto ha llevado a buscar una forma de planteo del problema que no requiera a priori de la regularidad de la frontera libre.

  Sea

$$\beta(s) = \begin{cases} s+1 & \text{si} \quad s > 0, \\ 0 & \text{si} \quad s \le 0, \end{cases}$$

  Y u una solución débil de $(\beta(u))_t - \Delta u = 0$ en todo el dominio.
  Si u es $C^1(\overline{\{u > 0\}})$ y $\partial\{u > 0\}$ es una superficie C^1, se tiene que u es una solucíón clásica del problema de Stefan.

Otras formulaciones del problema de Stefan

Haciendo un cambio de variable se obtiene la llamada "formulación entálpica":

Observemos que $\beta^{-1}(s) = (s-1)_+$

Sea u solución débil de Stefan y $v = \beta(u)$. Entonces, $u = (v-1)_+$ y v es solución débil de

$$v_t = \Delta(v-1)_+$$

en todo el dominio.

Otras formulaciones del problema de Stefan

Haciendo un cambio de variable se obtiene la llamada "formulación entálpica":

Observemos que $\beta^{-1}(s) = (s-1)_+$

Sea u solución débil de Stefan y $v = \beta(u)$. Entonces, $u = (v-1)_+$ y v es solución débil de

$$v_t = \Delta(v-1)_+$$

en todo el dominio.

La formulación entálpica fue estudiada recientemente reemplazando el operador de difusión por uno de difusión no local

Brändle, C.; Chasseigne, E.; Quirós, F. *Phase transitions with midrange interactions: a nonlocal Stefan model*. SIAM J. Math. Anal. 44 (2012), no. 4, 3071–3100.

La formulación entálpica no local presenta la formación de "zonas pastosas" aunque no las hubiera inicialmente. Estas son zonas donde la temperatura es 0 pero la entalpía no. Esto no tiene sentido en algunas aplicaciones.

La formulación entálpica no local presenta la formación de “zonas pastosas” aunque no las hubiera inicialmente. Estas son zonas donde la temperatura es 0 pero la entalpía no. Esto no tiene sentido en algunas aplicaciones.

Lo que planteamos en nuestro trabajo es un problema de tipo Stefan no local que presenta similitudes con el problema local, aunque admitiendo interacciones de largo alcance en la difusión.

Problemas tipo Stefan no local

La idea, en el caso de una población propagándose en un medio hostil, es que individuos cercanos al borde pueden saltar al medio hostil pero mueren automáticamente. Sin embargo, su muerte permite a otros individuos avanzar.

La idea, en el caso de una población propagándose en un medio hostil, es que individuos cercanos al borde pueden saltar al medio hostil pero mueren automáticamente. Sin embargo, su muerte permite a otros individuos avanzar.

Se puede pensar en un medio con un ph que mata a los individuos, pero sus cadáveres cambian el ph permitiendo el avance de otros individuos. Es de esperar que, cuantos más individuos se encuentren cerca de la frontera, más rápido avanzarán sobre el medio circundante.

Cómo medimos esa cantidad? De forma no local también.

Un problema tipo Stefan no local en 1 dimensión espacial

Dada la dificultad técnica geométrica de plantear el problema de Stefan clásico en N dimensiones espaciales, comenzamos por el caso de 1 dimensión.

Un problema tipo Stefan no local en 1 dimensión espacial

Dada la dificultad técnica geométrica de plantear el problema de Stefan clásico en N dimensiones espaciales, comenzamos por el caso de 1 dimensión.

El operador no local que consideramos es de la forma: $\mathcal{L}u = (J * u) - u$ donde $J \in C_0^\infty(B_d)$, $J > 0$ en B_d y de integral 1.
De esta forma, la ecuacion $u_t = \mathcal{L}u$ indica que si u en un punto es menor que el promedio ponderado por J alrededor del punto, u crece y si es mayor, u decrece. De esta form, u varía buscando un equilibrio. En este sentido, $\mathcal{L}$ es un operador de difusión.

Un problema tipo Stefan no local en 1 dimensión espacial

Dada la dificultad técnica geométrica de plantear el problema de Stefan clásico en N dimensiones espaciales, comenzamos por el caso de 1 dimensión.

El operador no local que consideramos es de la forma: $\mathcal{L}u = (J * u) - u$ donde $J \in C_0^\infty(B_d)$, $J > 0$ en B_d y de integral 1.
De esta forma, la ecuacion $u_t = \mathcal{L}u$ indica que si u en un punto es menor que el promedio ponderado por J alrededor del punto, u crece y si es mayor, u decrece. De esta form, u varía buscando un equilibrio. En este sentido, $\mathcal{L}$ es un operador de difusión.

Este tipo de operadores aparecen en procesos de Levy de salto puro y se usan para modelar procesos difusivos de poblaciones, enfermedades, etc...

Un problema tipo Stefan no local en 1D

Consideramos una función no negativa $u_0 \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ con $u_0 = 0$ si $x \geq s_0$ y buscamos una función no negativa $u(x, t)$ con $u \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}))$ y una función monótona creciente $s \in C([0, T])$ tales que

$$\begin{cases} u_t - \mathcal{L}u = 0 & \text{si} \quad x < s(t), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en} \quad \mathbb{R}, \\ u(x,t) = 0 & \text{si} \quad x \geq s(t), \\ s(0) = s_0, & \\ \dot{s}(t) = \int_{s(t)}^{\infty} (J * u)(x,t)\, dx & \end{cases}$$

Un problema tipo Stefan no local en 1D

Consideramos una función no negativa $u_0 \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ con $u_0 = 0$ si $x \geq s_0$ y buscamos una función no negativa $u(x,t)$ con $u \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R}))$ y una función monótona creciente $s \in C([0,T])$ tales que

$$\begin{cases} u_t - \mathcal{L}u = 0 & \text{si} \quad x < s(t), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en} \quad \mathbb{R}, \\ u(x,t) = 0 & \text{si} \quad x \geq s(t), \\ s(0) = s_0, & \\ \dot{s}(t) = \int_{s(t)}^{\infty} (J * u)(x,t)\, dx & \end{cases}$$

De esta forma, la velocidad de avance de la frontera libre $\dot{s}(t)$ es proporcional a la cantidad de individuos cerca de la frontera. Pero no la cantidad pura que sería el promedio de u en el punto de la frontera, sino una cantidad que de alguna forma pesa de manera distinta los que estan mas cerca de los que están mas lejos de la frontera. Un “flujo no local”.

Resultados:

- Existe una solución única para cada $T > 0$. La solución existe globalmente en el tiempo.

Un problema tipo Stefan no local en 1D

Resultados:

- Existe una solución única para cada $T > 0$. La solución existe globalmente en el tiempo.
- La frontera libre es estrictamente creciente, C^∞ y $u \in C^\infty(\{s_0 \leq x \leq s(t)\}$, tan regular como u_0 en $\{x \leq s_0\})$ y continua en $\mathbb{R}$.

Un problema tipo Stefan no local en 1D

Resultados:

- Existe una solución única para cada $T > 0$. La solución existe globalmente en el tiempo.
- La frontera libre es estrictamente creciente, C^∞ y $u \in C^\infty(\{s_0 \leq x \leq s(t)\}$, tan regular como u_0 en $\{x \leq s_0\})$ y continua en $\mathbb{R}$.
- Existe $\lim_{t\to\infty} s(t) = s_\infty \leq s_0 + \int u_0$.

Un problema tipo Stefan no local en 1D

Resultados:

- Existe una solución única para cada $T > 0$. La solución existe globalmente en el tiempo.
- La frontera libre es estrictamente creciente, C^∞ y $u \in C^\infty(\{s_0 \le x \le s(t)\})$, tan regular como u_0 en $\{x \le s_0\})$ y continua en $\mathbb{R}$.
- Existe $\lim_{t\to\infty} s(t) = s_\infty \le s_0 + \int u_0$.
- Si $\int |x| u_0(x)\,dx < \infty$ se sigue que $s_\infty = s_o + \int u_0$ y $s(t) - s_\infty = O(t^{-1/2})$.

Un problema tipo Stefan no local en 1D

Resultados:

- Existe una solución única para cada $T > 0$. La solución existe globalmente en el tiempo.
- La frontera libre es estrictamente creciente, C^∞ y $u \in C^\infty(\{s_0 \le x \le s(t)\})$, tan regular como u_0 en $\{x \le s_0\})$ y continua en $\mathbb{R}$.
- Existe $\lim_{t\to\infty} s(t) = s_\infty \le s_0 + \int u_0$.
- Si $\int |x| u_0(x)\, dx < \infty$ se sigue que $s_\infty = s_o + \int u_0$ y $s(t) - s_\infty = O(t^{-1/2})$.

La condición de frontera libre es esencial en estos resultados. Implica que el avance de la región poblada se da en forma proporcional a la disminución de la población. Es lo que pasa en el problema de Stefan clásico. Es decir,

$$\dot{s}(t) = -\dot{M}(t), \qquad M(t) = \int u(x,t)\, dx.$$

Un problema tipo Stefan no local en 1D

- Si $\int |x| u_0(x)\,dx < \infty$ y ϕ es la solución estacionaria no trivial del problema de Dirichlet no local en la semirrecta:

$$\mathcal{L}\phi = 0 \text{ en } x > 0, \quad \phi = 0 \text{ en } x < 0, \quad |\phi(x) - x| \le C \text{ en } x > 0.$$

Y,

$M^* := \int u_0(x)\phi(s_\infty - x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u(x,t)(s_\infty - x)\,\mathrm{d}x$.

Entonces, para todo $S < s_\infty$, se tiene

$$\sup_{x<S} \frac{t^{3/2}}{|x|+1} \left| u(x,t) - 2M^* \frac{\phi(s_\infty - x)}{s_\infty - x} \mathcal{D}_{\mathfrak{a}}(s_\infty - x, t) \right| \to 0,$$

con

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{a}}(x,t) = \frac{x}{2\mathfrak{a}t} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4\mathfrak{a}t}}}{(4\pi\mathfrak{a}t)^{1/2}}, \qquad \mathfrak{a} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} J(\xi)\xi^2\,\mathrm{d}\xi,$$

Un problema tipo Stefan no local en 1D

Finalmente, obtenemos

- $$t^{3/2}u(x,t) \to \frac{M^*}{2\sqrt{\pi}\mathfrak{a}^{3/2}}\phi(s_\infty - x)$$

  uniformemente sobre compactos, y

- $$t^{3/2}\,\dot{s}(t) \to \frac{M^*}{2\sqrt{\pi}\mathfrak{a}^{3/2}}\int_0^d\int_0^d J(x-y)\phi(y)\,dydx.$$

Un problema tipo Stefan no local en 1D

Finalmente, obtenemos

- $$t^{3/2}u(x,t) \to \frac{M^*}{2\sqrt{\pi}\mathfrak{a}^{3/2}}\phi(s_\infty - x)$$

  uniformemente sobre compactos, y

- $$t^{3/2}\,\dot{s}(t) \to \frac{M^*}{2\sqrt{\pi}\mathfrak{a}^{3/2}}\int_0^d\int_0^d J(x-y)\phi(y)\,dydx.$$

Resultados similares son válidos para el problema de Stefan clásico gracias a estimaciones precisas de la velocidad de convergencia al dipolo para la ecuación del calor en la semirrecta que obtuvimos con C. Cortázar y F. Quirós.

Un problema tipo Stefan no local en 1D

Finalmente, obtenemos

- $$t^{3/2} u(x,t) \to \frac{M^*}{2\sqrt{\pi}\mathfrak{a}^{3/2}} \phi(s_\infty - x)$$

  uniformemente sobre compactos, y

- $$t^{3/2}\,\dot{s}(t) \to \frac{M^*}{2\sqrt{\pi}\mathfrak{a}^{3/2}} \int_0^d \int_0^d J(x-y)\phi(y)\,dydx.$$

Resultados similares son válidos para el problema de Stefan clásico gracias a estimaciones precisas de la velocidad de convergencia al dipolo para la ecuación del calor en la semirrecta que obtuvimos con C. Cortázar y F. Quirós. Estos resultados asintóticos tan precisos no se conocían para Stefan clásico.

Un problema tipo Stefan no local en la semirrecta

- Consideramos el mismo problema de frontera libre pero ahora la región ocupada por la población es $0 < x < s(t)$.

Un problema tipo Stefan no local en la semirrecta

- Consideramos el mismo problema de frontera libre pero ahora la región ocupada por la población es $0 < x < s(t)$.
- En $x = 0$ fijamos el dato $u(x,t) = A$ si $-d < x < 0$ con A una constante no negativa.

Un problema tipo Stefan no local en la semirrecta

- Consideramos el mismo problema de frontera libre pero ahora la región ocupada por la población es $0 < x < s(t)$.
- En $x = 0$ fijamos el dato $u(x,t) = A$ si $-d < x < 0$ con A una constante no negativa.
- Existencia, unicidad, regularidad de la solución y de la frontera libre se prueban de manera similar. La diferencia se encuentra en el comportamiento asintótico de la solución.
- Si $A = 0$, vuelve a haber localización. Es decir, $\lim_{t\to\infty} s(t) = s_\infty < \infty$.

Un problema tipo Stefan no local en la semirrecta

- Consideramos el mismo problema de frontera libre pero ahora la región ocupada por la población es $0 < x < s(t)$.
- En $x = 0$ fijamos el dato $u(x, t) = A$ si $-d < x < 0$ con A una constante no negativa.
- Existencia, unicidad, regularidad de la solución y de la frontera libre se prueban de manera similar. La diferencia se encuentra en el comportamiento asintótico de la solución.
- Si $A = 0$, vuelve a haber localización. Es decir, $\lim_{t\to\infty} s(t) = s_\infty < \infty$.
- Si $A > 0$, la población eventualmente ocupa toda la región. Es decir, $s(t) \to \infty$.

Un problema tipo Stefan no local en la semirrecta

- Cuando $A = 0$ se tiene que $s(t) \leq s_0 + \alpha^{-1} \int u_0 \phi$ donde recordemos que ϕ es la solución estacionaria no trivial de Dirichlet no local en la semirrecta:

$$\mathcal{L}\phi = 0 \text{ en } x > 0, \quad \phi = 0 \text{ en } x < 0, \quad |\phi(x) - x| \leq C,$$

y $0 < \alpha \leq \phi(x)$ para $x \geq 0$.

Un problema tipo Stefan no local en la semirrecta

- Cuando $A = 0$ se tiene que $s(t) \leq s_0 + \alpha^{-1} \int u_0 \phi$ donde recordemos que ϕ es la solución estacionaria no trivial de Dirichlet no local en la semirrecta:

$$\mathcal{L}\phi = 0 \text{ en } x > 0, \quad \phi = 0 \text{ en } x < 0, \quad |\phi(x) - x| \leq C,$$

  y $0 < \alpha \leq \phi(x)$ para $x \geq 0$.

- Además, existen $C > 0, \lambda > 0$ tales que $u(x,t) \leq Ce^{-\lambda t}$.

Un problema tipo Stefan no local en la semirrecta

- Si $A > 0$, se tiene que $u(x, t) \to A$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}_+$.

Un problema tipo Stefan no local en la semirrecta

- Si $A > 0$, se tiene que $u(x,t) \to A$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}_+$.
  Este resultado se obtiene comparando, por un lado, por debajo con la solución $U(x,t)$ del problema que inicialmente es 0 y cuya frontera libre empieza en $x = 0$.

- Si $A > 0$, se tiene que $u(x,t) \to A$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}_+$.
  Este resultado se obtiene comparando, por un lado, por debajo con la solución $U(x,t)$ del problema que inicialmente es 0 y cuya frontera libre empieza en $x = 0$. Para esta solución probamos propiedades como que es creciente en el tiempo y decreciente en el espacio y converge puntualmente a A por converger a la solución estacionaria acotada del problema de Dirichlet con dato A, que es la constante A. Por lo tanto, converge uniformemente sobre compactos.

- Si $A > 0$, se tiene que $u(x,t) \to A$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}_+$.
  Este resultado se obtiene comparando, por un lado, por debajo con la solución $U(x,t)$ del problema que inicialmente es 0 y cuya frontera libre empieza en $x = 0$.
  Para esta solución probamos propiedades como que es creciente en el tiempo y decreciente en el espacio y converge puntualmente a A por converger a la solución estacionaria acotada del problema de Dirichlet con dato A, que es la constante A. Por lo tanto, converge uniformemente sobre compactos.
  Por arriba comparamos a u con $v + A$ donde v es la solución de

  $$v_t - \mathcal{L}v = 0 \text{ en } x > 0, \quad v = 0 \text{ en } x < 0, \quad v(x,0) = (u_0 - A)_+$$

  y usando que esta solución tiende a 0 cuando el tiempo tiende a infinito.

- Si $A > 0$, se tiene que $s(t) \to \infty$.

Un problema tipo Stefan no local en la semirrecta

- Si $A > 0$, se tiene que $s(t) \to \infty$.
- Más precisamente, si $F(t) := t^{-1} M_\phi(t)$ con $M_\phi(t) = \int U(x,t)\phi(x)\,dx$, se tiene que $F(t)$ es creciente y acotada y por lo tanto converge a F_∞, y

$$t^{-1/2} s(t) \;\to\; c_* := (2C_0 A - 2F_\infty)^{1/2}$$

donde $C_0 = \int_{-d}^{0} \int_0^d J(x-y)\phi(x)\,dxdy > 0$.

Un problema tipo Stefan no local en la semirrecta

- Si $A > 0$, se tiene que $s(t) \to \infty$.
- Más precisamente, si $F(t) := t^{-1} M_\phi(t)$ con $M_\phi(t) = \int U(x,t)\phi(x)\,dx$, se tiene que $F(t)$ es creciente y acotada y por lo tanto converge a F_∞, y

$$t^{-1/2} s(t) \;\to\; c_* := (2C_0 A - 2F_\infty)^{1/2}$$

donde $C_0 = \int_{-d}^{0} \int_0^d J(x-y)\phi(x)\,dxdy > 0$.

Este resultado es válido si $\|u_0\|_{L^\infty} < A$.

- Si $A > 0$, se tiene que $s(t) \to \infty$.
- Más precisamente, si $F(t) := t^{-1} M_\phi(t)$ con $M_\phi(t) = \int U(x,t)\phi(x)\, dx$, se tiene que $F(t)$ es creciente y acotada y por lo tanto converge a F_∞, y

$$t^{-1/2} s(t) \ \to\ c_* := (2C_0 A - 2F_\infty)^{1/2}$$

donde $C_0 = \int_{-d}^{0} \int_0^d J(x-y)\phi(x)\, dxdy > 0$.

Este resultado es válido si $\|u_0\|_{L^\infty} < A$.

Observar que c_* es independiente de u.

- Estudiamos el problema cuando el dato inicial u_0 se anula para $x < s_0^-$ y para $x > s_0^+$. En este caso buscamos u que satisfaga la ecuación no local en $s^-(t) < x < s^+(t)$ con $s^-(0) = s_0^-$, $s^+(0) = s_0^+$ y

$$\dot{s}^-(t) = -\int_{-\infty}^{s^-(t)} (J*u)(x,t)\,dx, \quad \dot{s}^+(t) = \int_{s^+(t)}^{\infty} (J*u)(x,t)\,dx.$$

- Estudiamos el problema cuando el dato inicial u_0 se anula para $x < s_0^-$ y para $x > s_0^+$. En este caso buscamos u que satisfaga la ecuación no local en $s^-(t) < x < s^+(t)$ con $s^-(0) = s_0^-$, $s^+(0) = s_0^+$ y

$$\dot{s}^-(t) = -\int_{-\infty}^{s^-(t)} (J*u)(x,t)\,dx, \quad \dot{s}^+(t) = \int_{s^+(t)}^{\infty} (J*u)(x,t)\,dx.$$

- Probamos existencia, unicidad, regularidad de la solución y las fronteras libres.

Un problema tipo Stefan no local en 1D. Caso acotado

- Estudiamos el problema cuando el dato inicial u_0 se anula para $x < s_0^-$ y para $x > s_0^+$. En este caso buscamos u que satisfaga la ecuación no local en $s^-(t) < x < s^+(t)$ con $s^-(0) = s_0^-$, $s^+(0) = s_0^+$ y

$$\dot{s}^-(t) = -\int_{-\infty}^{s^-(t)} (J{*}u)(x,t)\,dx, \quad \dot{s}^+(t) = \int_{s^+(t)}^{\infty} (J{*}u)(x,t)\,dx.$$

- Probamos existencia, unicidad, regularidad de la solución y las fronteras libres.
- Probamos que hay localización: $s^-(t) \to s_\infty^- > -\infty$ y $s^+(t) \to s_\infty^+ < \infty$.

Un problema tipo Stefan no local en 1D. Caso acotado

- Estudiamos el problema cuando el dato inicial u_0 se anula para $x < s_0^-$ y para $x > s_0^+$. En este caso buscamos u que satisfaga la ecuación no local en $s^-(t) < x < s^+(t)$ con $s^-(0) = s_0^-$, $s^+(0) = s_0^+$ y

$$\dot{s}^-(t) = -\int_{-\infty}^{s^-(t)} (J*u)(x,t)\,dx, \quad \dot{s}^+(t) = \int_{s^+(t)}^{\infty} (J*u)(x,t)\,dx.$$

- Probamos existencia, unicidad, regularidad de la solución y las fronteras libres.
- Probamos que hay localización: $s^-(t) \to s_\infty^- > -\infty$ y $s^+(t) \to s_\infty^+ < \infty$.
- Deducimos que u decae exponencialmente.

Un problema tipo Stefan no local en 1D. Caso acotado

- Estudiamos el problema cuando el dato inicial u_0 se anula para $x < s_0^-$ y para $x > s_0^+$. En este caso buscamos u que satisfaga la ecuación no local en $s^-(t) < x < s^+(t)$ con $s^-(0) = s_0^-$, $s^+(0) = s_0^+$ y

$$\dot{s}^-(t) = -\int_{-\infty}^{s^-(t)} (J*u)(x,t)\,dx, \quad \dot{s}^+(t) = \int_{s^+(t)}^{\infty} (J*u)(x,t)\,dx.$$

- Probamos existencia, unicidad, regularidad de la solución y las fronteras libres.
- Probamos que hay localización: $s^-(t) \to s_\infty^- > -\infty$ y $s^+(t) \to s_\infty^+ < \infty$.
- Deducimos que u decae exponencialmente.
- Además, caracterizamos el tamaño del dominio final: $s_\infty^+ - s_\infty^- = s^+ - s^- + \int u_0$.

- Estudiamos el problema cuando el dato inicial u_0 se anula para $x < s_0^-$ y para $x > s_0^+$. En este caso buscamos u que satisfaga la ecuación no local en $s^-(t) < x < s^+(t)$ con $s^-(0) = s_0^-$, $s^+(0) = s_0^+$ y

$$\dot{s}^-(t) = -\int_{-\infty}^{s^-(t)} (J*u)(x,t)\,dx, \quad \dot{s}^+(t) = \int_{s^+(t)}^{\infty} (J*u)(x,t)\,dx.$$

- Probamos existencia, unicidad, regularidad de la solución y las fronteras libres.
- Probamos que hay localización: $s^-(t) \to s_\infty^- > -\infty$ y $s^+(t) \to s_\infty^+ < \infty$.
- Deducimos que u decae exponencialmente.
- Además, caracterizamos el tamaño del dominio final: $s_\infty^+ - s_\infty^- = s^+ - s^- + \int u_0$.
- En el caso de simetría radial, $s_\infty^+ = -s_\infty^- = s^+ + \frac{1}{2}\int u_0$.

Un problema tipo Stefan no local en $\mathbb{R}^N$

- El caso $N-$dimensional general todavía requiere de más estudio. Aún no tenemos claro cómo hacer un planteo que permita al menos existencia local de solución si hay suficiente regularidad de los datos iniciales. Está en estudio.

Un problema tipo Stefan no local en $\mathbb{R}^N$

- El caso $N-$dimensional general todavía requiere de más estudio. Aún no tenemos claro cómo hacer un planteo que permita al menos existencia local de solución si hay suficiente regularidad de los datos iniciales. Está en estudio.
- También dejamos para un futuro encontrar un planteo débil o viscoso que permita entender el problema general.

Un problema tipo Stefan no local en $\mathbb{R}^N$

- El caso $N-$dimensional general todavía requiere de más estudio. Aún no tenemos claro cómo hacer un planteo que permita al menos existencia local de solución si hay suficiente regularidad de los datos iniciales. Está en estudio.
- También dejamos para un futuro encontrar un planteo débil o viscoso que permita entender el problema general.
- Por ahora planteamos el caso radial donde no se encuentran estos problemas geométricos:

- El caso $N-$dimensional general todavía requiere de más estudio. Aún no tenemos claro cómo hacer un planteo que permita al menos existencia local de solución si hay suficiente regularidad de los datos iniciales. Está en estudio.
- También dejamos para un futuro encontrar un planteo débil o viscoso que permita entender el problema general.
- Por ahora planteamos el caso radial donde no se encuentran estos problemas geométricos:Dada u_0 radialmente simétrica y continua con $u_0 = 0$ si $|x| > R_0$, buscamos $u \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R}^N))$, radialmente simétrica y continua tal que

$$u_t - \mathcal{L}u = 0 \text{ si } |x| < R(t), \quad u = 0 \text{ si } |x| \geq R(t), \quad u(x,0) = u_0(x).$$

$$R(0) = R_0, \quad \dot{R}(t) = \int_{R(t)}^{\infty} \left(\frac{r}{R(t)}\right)^{N-1} (J * u)(r,t)\, dr.$$

Un problema tipo Stefan no local en $\mathbb{R}^N$

- Probamos existencia, unicidad, regularidad de la solución y la frontera libre.

Un problema tipo Stefan no local en $\mathbb{R}^N$

- Probamos existencia, unicidad, regularidad de la solución y la frontera libre.
- El volumen de la zona poblada crece a la misma velocidad con la que decrece la masa.

Un problema tipo Stefan no local en $\mathbb{R}^N$

- Probamos existencia, unicidad, regularidad de la solución y la frontera libre.
- El volumen de la zona poblada crece a la misma velocidad con la que decrece la masa.
- Existe $\lim_{t\to\infty} R(t) = R_\infty < \infty$.

Un problema tipo Stefan no local en $\mathbb{R}^N$

- Probamos existencia, unicidad, regularidad de la solución y la frontera libre.
- El volumen de la zona poblada crece a la misma velocidad con la que decrece la masa.
- Existe $\lim_{t\to\infty} R(t) = R_\infty < \infty$.
- La solución decrece exponencialmente.

- Probamos existencia, unicidad, regularidad de la solución y la frontera libre.
- El volumen de la zona poblada crece a la misma velocidad con la que decrece la masa.
- Existe $\lim_{t\to\infty} R(t) = R_\infty < \infty$.
- La solución decrece exponencialmente.
- $$R_\infty = \left(R_0^N + \frac{M(0)}{\alpha_N}\right)^{1/N},$$
  donde $M(0) = \int_{\mathbb{R}^N} u_0$ y $\alpha_N = |B_1|$. Es decir,
  $$|B_{R_\infty}| = |B_{R_0}| + M(0).$$

Gracias por su atención