

On the stability of one-sided periodic oscillations in MEMS via lower and upper solutions

A. Rivera¹

¹PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA-CALI, COLOMBIA.

Seminario de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico
(SEDAN). UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Buenos Aires-Argentina. Diciembre 11, 2018.

¿Que es un MEMS?

Micro-Electro-Mechanical Systems, o MEMS, es una tecnología que en términos generales se puede definir como elementos mecánicos y electromecánicos miniaturizados que son hechos utilizando las técnicas de microfabricación.

¿Que es un MEMS?

Micro-Electro-Mechanical Systems, o MEMS, es una tecnología que en términos generales se puede definir como elementos mecánicos y electromecánicos miniaturizados que son hechos utilizando las técnicas de microfabricación.

El tamaño de un MEMS típicamente varía de 20 micrómetros a un milímetro, mientras que el tamaño de los subcomponentes MEMS está en el rango de 1 a 100 micrómetros. Los tipos de dispositivos MEMS pueden variar desde estructuras relativamente simples que no tienen elementos móviles, hasta sistemas electromecánicos extremadamente complejos con múltiples elementos móviles.

¿Que es un MEMS?

Micro-Electro-Mechanical Systems, o MEMS, es una tecnología que en términos generales se puede definir como elementos mecánicos y electromecánicos miniaturizados que son hechos utilizando las técnicas de microfabricación.

El tamaño de un MEMS típicamente varía de 20 micrómetros a un milímetro, mientras que el tamaño de los subcomponentes MEMS está en el rango de 1 a 100 micrómetros. Los tipos de dispositivos MEMS pueden variar desde estructuras relativamente simples que no tienen elementos móviles, hasta sistemas electromecánicos extremadamente complejos con múltiples elementos móviles.

El único criterio principal de un MEMS es que hay al menos un elemento que tiene algún tipo de funcionalidad mecánica, independientemente de si este elemento puede moverse o no.

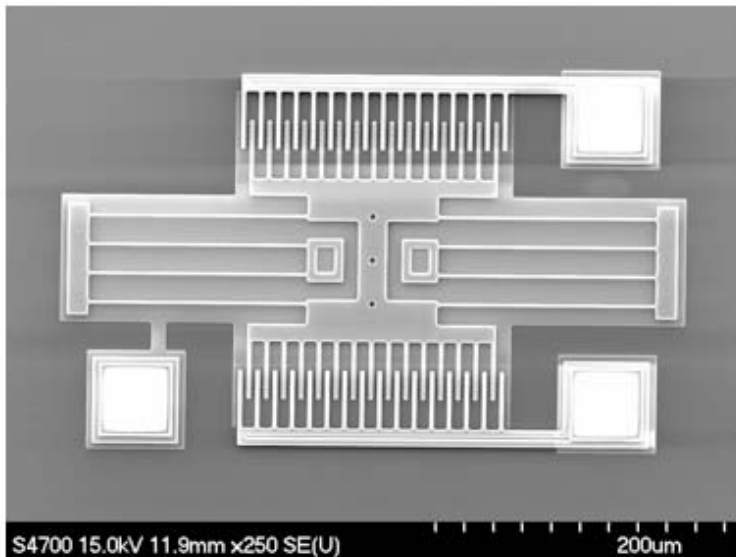
Aplicaciones principales

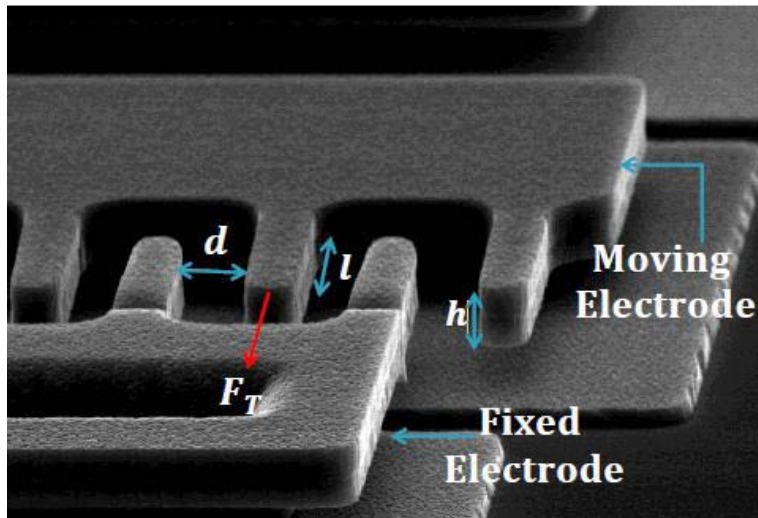
Detección: cambios en el sonido, el movimiento, la presión y la temperatura. La detección puede incluir no solo el movimiento físico, sino también la vibración, las ondas acústicas, las ondas de fluido, las ondas de luz, el calor y la presión del aire.

Actuación: Conversión de activación y gestión de proyección / recepción de luz, procesamiento de señales de radiofrecuencia y gestión de fluidos. La actuación puede incluir detección, filtrado, conversión y modulación.

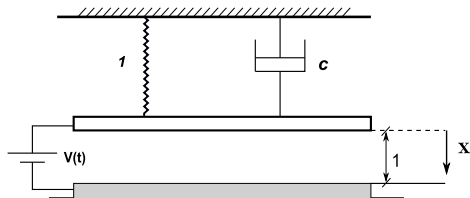
MEMS a nuestro alrededor!!

- Los sensores de presión que se usan en diálisis renal para controlar las presiones de entrada y salida de sangre regular los caudales durante el procedimiento de diálisis.
- Sistemas de despliegue de airbags de choque en automóviles.
- Sensores de inercia para teléfonos inteligentes y tablets.
- Controladores de videojuegos, entrega de medicamentos, micrófonos, sensores de gases y químicos, y mucho, mucho más

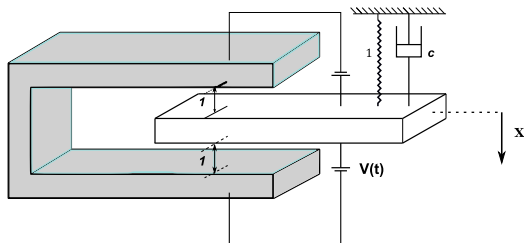




Actuadores electrostáticos. Modelos Canónicos



MODELO DE NATHANSON



MODELO TIPO PEINE

Ecuaciones de movimiento

Modelo de Nathanson

$$\ddot{x} + c\dot{x} + x = \frac{\beta \mathcal{V}^2(t)}{(1-x)^2},$$

where $x \in [0, 1[$.

Modelo tipo Peine

$$\ddot{x} + c\dot{x} + x + x^3 = \frac{4\beta \mathcal{V}^2(t)x}{(1-x^2)^2},$$

where $x \in]-1, 1[$.

En ambos modelos $\mathcal{V}(t) = v_0 + \delta v(t)$ es el voltaje aplicado ($v(t)$ es T -periódica) a través de los electrodos. $\delta > 0$ y $\beta > 0$ son parámetros relacionados con la amplitud del voltaje alterno y fabricación del dispositivo respectivamente mientras que $c \geq 0$ representa la viscosidad del medio.

Búsqueda de soluciones periódicas. caso $c = 0$

Estamos interesados en soluciones periódicas para las ecuaciones

$$\ddot{x} + x = \frac{\beta \mathcal{V}^2(t)}{(1-x)^2}, \quad (1)$$

$$\ddot{x} + x + \alpha x^3 = \frac{4\beta \mathcal{V}^2(t)x}{(1-x^2)^2}, \quad (2)$$

Consideraciones previas:

- $\mathcal{V}$ es positivo, por lo tanto, en adelante se considera $\delta \in [0, -v_0/v_{\min}[$ y $v_{\min} < 0$.
- Se definen algunos valores críticos del voltaje DC (corriente directa)

$$v_{p,N} = \sqrt{\frac{4}{27\beta}} \quad v_{p,C} = \sqrt{\frac{1}{4\beta}} \quad \text{and} \quad v_{q,C} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{(1+\alpha)^3}{27\beta}}.$$

Theorem (Oscilaciones en el Modelo de Nathanson)

Suponga que

$$i) \quad 0 < \mathcal{V}_{\text{máx}}^2 < v_{p,N}^2 \quad ii) \quad 1 - 2\beta \mathcal{V}_{\text{mín}}^2 < \left(\frac{\pi}{T}\right)^2$$

Entonces la ecuación (1) tiene al menos dos soluciones T -periódicas φ y ψ que cumplen

$$x_{U,1} \leq \varphi(t) \leq x_{L,1} \quad x_{L,2} \leq \psi(t) \leq x_{U,2}, \quad (3)$$

para todo $t \in [0, T]$ en donde $x_{U,1}, x_{U,2}$ son la raíz más pequeña y más grande en $]0, 1[$ de

$$(1 - x)^2 x = \beta \mathcal{V}_{\text{mín}}^2,$$

y $x_{L,1}, x_{L,2}$ son la raíz más pequeña y más grande en $]0, 1[$ de

$$(1 - x)^2 x = \beta \mathcal{V}_{\text{máx}}^2.$$

Theorem (Estabilidad lineal y multiplicidad)

La solución $\varphi(t)$ es elíptica y es la única solución T -periódica en $]x_{U,1}, x_{L,1}[$. Además, la solución $\psi(t)$ es hiperbólica y es la única solución T -periódica en $]x_{L,2}, x_{U,2}[$. Además, la ecuación (1) tiene exactamente dos soluciones positivas T -periódicas.

Finalmente, si la condición $\mathcal{V}_{\min}^2 > v_{p,N}^2$, se satisface entonces, no existen soluciones T -periódicas de (1).

Theorem (Oscilaciones en el Modelo Tipo Peine)

Sea $\hat{\phi}(x) = (1 + \alpha x^2)(1 - x^2)^2$, $x \in [0, 1]$.

- ① Si $0 < \alpha \leq 2$ y $\mathcal{V}_{\text{máx}}^2 < v_{p,C}^2$, entonces existe una solución T -periódica ψ de (2) tal que

$$0 < \hat{x}_L \leq \psi(t) \leq \hat{x}_U, \quad (4)$$

para todo $t \in [0, T]$ en donde $\hat{x}_L, \hat{x}_U \in]0, 1[$ satisfacen

$$\hat{\phi}(x) = 4\beta\mathcal{V}_{\text{máx}}^2 \quad \text{y} \quad \hat{\phi}(x) = 4\beta\mathcal{V}_{\text{mín}}^2$$

respectivamente. Más aún, ψ es hiperbólica.

- ② For $\alpha > 2$;
 a) If $v_{p,C}^2 < \mathcal{V}_{\text{mín}}^2$ y $\mathcal{V}_{\text{máx}}^2 < v_{q,C}^2$ entonces existen dos soluciones T -periódicas positivas ϕ, ψ of (2) tales que

$$0 < \hat{x}_{U,1} \leq \phi(t) \leq \hat{x}_{L,1} < \hat{x}_{L,2} \leq \psi(t) \leq \hat{x}_{U,2},$$

Theorem

para todo $t \in [0, T]$ en donde

$$\hat{\phi}(\hat{x}_{L,1}) = \hat{\phi}(\hat{x}_{L,2}) = 4\beta\mathcal{V}_{\text{máx}}^2, \quad \text{and} \quad \hat{\phi}(\hat{x}_{U,1}) = \hat{\phi}(\hat{x}_{U,2}) = 4\beta\mathcal{V}_{\text{mín}}^2.$$

Más aún, ϕ es elíptica y ψ es hiperbólica.

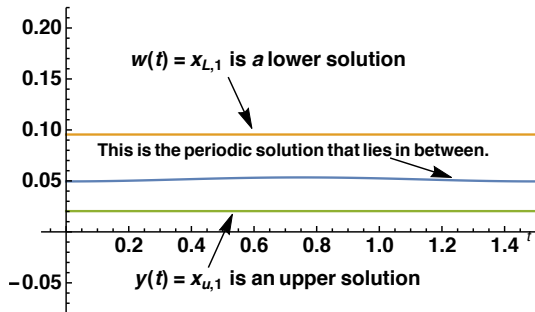
- b) Si $\mathcal{V}_{\text{máx}}^2 < v_{p,C}^2$ obtenemos la misma conclusión que en el caso 1.

Simulaciones numéricas. Ejemplos

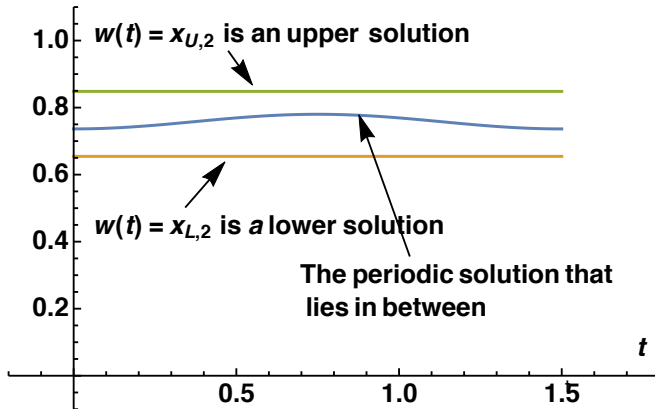
Consideremos el modelo de Nathanson (1) con $\beta = \frac{5}{256}$ and $v = \frac{3}{2} + \frac{\delta}{2} \cos(\frac{4\pi}{3}t)$, esto es,

$$\ddot{x} + x = \frac{\frac{5}{256} \left(\frac{3}{2} + \frac{\delta}{2} \cos(\frac{4\pi}{3}t) \right)^2}{(1-x)^2} \quad (5)$$

Caso $\delta = 1$



Caso $\delta = 1$



Continuación analítica

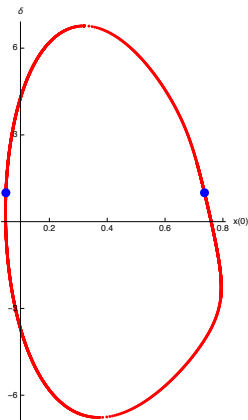


Figura: Cada punto de esta familia representa una solución periódica. El eje horizontal representa las condiciones iniciales de la solución en $t = 0$ y el eje vertical los valores de δ . Los puntos azules corresponden a las dos soluciones periódicas mostradas previamente para el caso $\delta = 1$

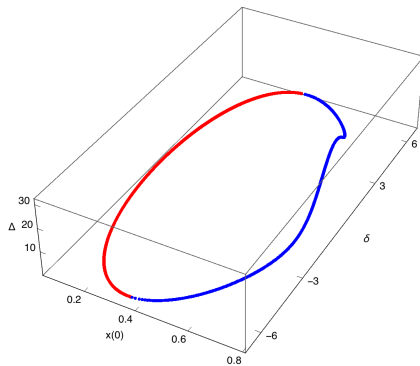
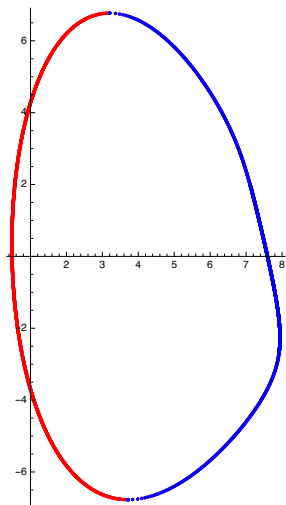


Figura: Los puntos en rojo corresponden a soluciones periódicas linealmente estables dado que estos puntos Δ está en $] - 2, 2[$

MODELO TIPO PEINE

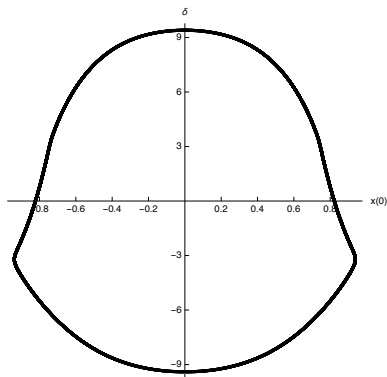
$$\ddot{x} + x + x^3 = \frac{\frac{20}{256} \left(\frac{3}{2} + \frac{\delta}{2} \cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) \right)^2}{(1 - x^2)^2} x \quad (6)$$

Continuacion Analítica

MODELO TIPO PEINE

$$\ddot{x} + x + x^3 = \frac{\frac{20}{256} \left(\frac{3}{2} + \frac{\delta}{2} \cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) \right)^2}{(1 - x^2)^2} x \quad (6)$$

Continuacion Analítica





S. Ai and J. A. Pelesko,

Dynamics of a canonical electrostatic MEMS/NEMS system,
J. Dyn. Differ. Eqns., 20 (2007), 609–641.



C. De Coster and P. Habets,

Two-point boundary value problems: Lower and Upper solutions,

Mathematics in Science and Engineering, vol. 205, Elsevier,
Amsterdam (2006).



A. Gutiérrez and P. J. Torres,

Non-autonomous saddle-node bifurcation in a canonical electrostatic MEMS,

Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng. 23(5), 1350088 (9p.)
(2013)



A. Gutiérrez and, D. Núñez and A. Rivera,
*Effects of voltage change on the dynamics in a a comb-drive
 finger of an electrostatic actuator,*
 Int. J. Non-linear Mechanics, 95 (2017) 224-232.



J. Lei, X. Li, P. Yan, and M. Zhang.
*Twist character of the last amplitude periodic solution of the
 forced pendulum.,*
 SIAM J. Math. Anal. vol. 35, No 4, pp. 844-867.



H.C. Nathanson, W.E. Newell, R.A. Wickstrom, J.R. Davis,
The resonant gate transistor,
 IEEE Transactions Electron. Devices, vol.14, no.3, (1967) 117-
 133.



D. Núñez,

The method of lower and upper solutions and the stability of periodic oscillations,

Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications. 51. 2002, pp. 1207-1222.



D. Núñez and P.J. Torres,

Stable odd solutions of some periodic equations modelling satellite motion,

Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 279, no. 2, (2003) pp. 700-709.



D. Núñez, A. Rivera and O. Perdomo,

On the stability of periodic solutions with defined sin in MEMS via lower and upper solutions,

Nonlinear Analysis:Real World Appl., (2019) 195-218.