Optimal stochastic control on cash management

Pablo Azcue
Universidad Torcuato Di Tella (UTDT), Buenos Aires

FCEN - UBA, 2018

Coauthor: Nora Muler (UTDT)

Accepted to be published in Applied Mathematics and Optimization

El Problema

Estudiamos el problema de una persona que quiere manejar de manera óptima el dinero que tiene en efectivo. Sabe que, con el transcurso del tiempo, le ingresa dinero en efectivo de forma aleatoria y debe pagar en efectivo algunos gastos (algunos deterministicos y otros aleatorios). La persona tiene que decidir cuanto efectivo debe tener en el bolsillo (suponemos que tiene fondos en el banco o inversiones por el cual obtiene interes). Por un lado, un costo de oportunidad por tener dinero en efectivo (el interes que esta perdiendo por no tener el dinero invertido) y por otro lado hay costos al extraer o depositar dinero en su cuenta bancaria o fondo de inversión. Debe decidir en que momentos debe hacer los depósitos y las extracciones. Si el efectivo no le alcanza para cubrir un gasto debe hacer inmediatamente una extracción.

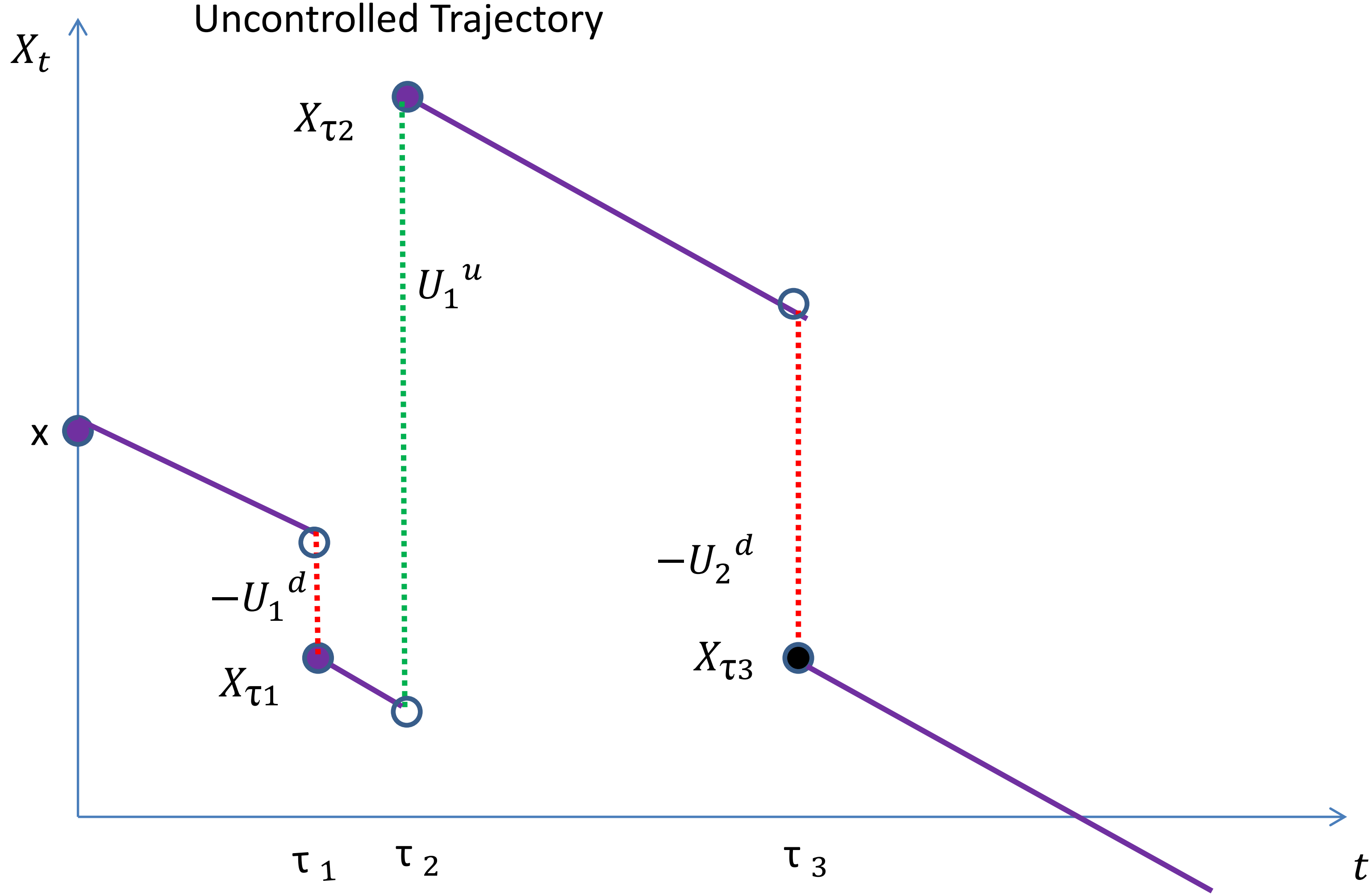
El modelo

Consideramos que la evolución del efectivo sigue un proceso de tiempo continuo donde los cambios en la cantidad de dinero siguen un proceso de Poisson compuesto con saltos para arriba (ingresos) y para abajo (gastos) y una deriva $\mu < 0$.

$$\overbrace{X_t}^{\text{dinero en tiempo } t} = \overbrace{x}^{\text{dinero inicial}} + \overbrace{\mu\, t}^{\text{gastos fijos}} + \overbrace{\sum_{i=1}^{N_t^d} (-U_i^d)}^{\text{gastos aleatorios}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{N_t^u} U_j^u}^{\text{ingresos aleatorios}}.$$

- Los procesos de llegada de los gastos e ingresos N_t^d y N_t^u (saltos para abajo y para arriba) son procesos de Poisson independientes. Sus intensidades son β_d y β_u.
- Los tamaños de los saltos positivos y negativos son variables aleatorias i.i.d. con distribuciones F_d and F_u independientes y con esperanza finitas.

Uncontrolled Trajectory



Los controles

- La persona puede hacer una extracción o un depósito en cualquier momento para evitar el exceso o la escasez de dinero, pero es obligatorio realizar una extracción cuando la cantidad de efectivo se hace negativa.
- Consideramos también que hay un "costo de oportunidad" por tener el dinero en efectivo: se está perdiendo la oportunidad de obtener el interes que se recibiría si el dinero estuviera en el banco.
- El objetivo es encontrar la estrategia que minimice el valor esperado del valor presente de todos los costos futuros.

La estrategia de control debe ser adaptada: esto significa que la decisión de hacer una extraccion o deposito en el momento t solo depende de los gastos e ingresos en los tiempos anteriores a t (y de las decisiones tomadas previamente). Un estrategia es un par $\pi = (\pi^d, \pi^u)$,

- $\pi^d = (\xi_n^d, Z_n^d)_{1 \le n \le M_d}$, ξ_n^d es el tiempo y Z_n^d es el monto del n-ésimo depósito.
- $\pi^u = (\xi_n^u, Z_n^u)_{1 \le n \le M_u}$, ξ_n^u es el tiempo y Z_n^u es el monto de la n-ésima extracción.

M_d y M_u puede ser finitos or infinitos. El proceso de dinero en efectivo controlado es

$$X_t^\pi = X_t - \overbrace{\sum_{n=1}^{M_d} I_{\{t \ge \xi_n^d\}} Z_n^d}^{\text{depósitos}} + \overbrace{\sum_{n=1}^{M_u} I_{\{t \ge \xi_n^u\}} Z_n^u}^{\text{extracciones}}$$

El costo de hacer un depósito Z^d es de $K_d + k_d Z^d$, y el costo de realizar una extracción Z^u es de $K_u + k_u Z^u$ ($K_u > 0$, $K_d > 0$, $k_d \ge 0$ y $k_u \ge 0$). El costo de oportunidad es continuo con tasa $a > 0$.

Cantidad a minimizar.

Consideremos una tasa de impaciencia $\delta > 0$. El costo de la estrategia π, empezando con cantidad inicial x, tiene dos términos:

1. El valor esperado del costo total de oportunidad descontado:

$$H_\pi(x) = E_x\left[\int_0^\infty e^{-\delta t} a X_t^\pi \, dt\right].$$

2. El valor esperado del costo total descontado por hacer los depósitos y extracciones:

$$A_\pi(x) = E_x \left[\overbrace{\sum_{n=1}^{M_d} e^{-\delta \xi_n^d}(K_d + k_d Z_n^d)}^{A_\pi^d(x) \text{ (depósitos)}} + \overbrace{\sum_{n=1}^{M_u} e^{-\delta \xi_n^u}(K_u + k_u Z_n^u)}^{A_\pi^u(x) \text{ (extracciones)}}\right]$$

Por lo tanto, el costo de usar la estrategia π, si empezamos en x es:

$$C_\pi(x) = H_\pi(x) + A_\pi(x).$$

y nuestro objetivo es encontrar, para cada x el valor

$$C(x) = \inf_\pi C_\pi(x)$$

y, si es posible, encontrar una estrategia óptima π_x^* con

$$C(x) = \inf_\pi C_\pi(x) = C_{\pi_x^*}(x).$$

Propiedades elementales de la función C.

Para resolver el problema estudiamos la función $C(x)$. Se pueden demostrar las siguientes propiedades.

- C está bien definida, más aun vale que $\frac{C(x)}{K_d+k_d x}$ está acotado en $[0,\infty)$ y $\frac{C(x)}{K_u+k_u x}$ está acotado en $(-\infty,0]$.
- C es continua y localmente Lipschitz (finalmente se puede probar que es Lipschitz pero puede no ser diferenciable).

Desigualdad 1 de HJB (depósitos inmediatos)

Teníamos que $C(x) = \inf_\pi C_\pi(x)$. Tomemos primero las estrategias π donde se deposita inmediatamente: $\xi_1^d = 0$, $Z_1^d = w \le x$ (podemos suponer $\xi_1^u > 0$), tenemos entonces

$$\begin{aligned} C(x) &\le C_\pi(x) \\ &= (K_d + k_d z) + H_{\pi_1}(x-w) + A^d_{\pi_1}(x-z) + A^d_{\pi_1}(x-w) \end{aligned}$$

donde π_1 es igual a π pero sacando el primer depósito $(\xi_n^d, Z_n^d) = (0, w)$.

Por lo tanto

$$C(x) \le (K_d + k_d w) + C(x-w) \text{ y}$$

$$E_d(C) := \min_{0 \le w \le x} \left[(K_d + k_d w) + C(x-w) \right] - C(x) \ge 0.$$

Desigualdad 2 de HJB (extracciones inmediatas)

Tomemos ahora las estrategias π donde se hace una extracción inmediatamente $\xi_1^u = 0$, $Z_1^u = z$ (podemos suponer $\xi_1^d > 0$), tenemos entonces

$$\begin{aligned} C(x) &\leq C_\pi(x) \\ &= (K_u + k_u z) + H_{\pi_1}(x+z) + A^u_{\pi_1}(x+z) + A^u_{\pi_1}(x+z) \end{aligned}$$

donde π_1 es igual a π pero sacando en primer depósito $(\xi_n^u, Z_n^u) = (0, z)$.

Por lo tanto

$$C(x) \leq (K_u + k_u z) + C(x+z) \text{ y}$$

$$E_u(C) := \min_{z>0}\left[(K_u + k_u z) + C(x+z)\right] - C(x) \geq 0$$

Desigualdad 3 de HJB (sin control)

Finalmente tomemos una estrategia π con $\xi_1^d > 0$ y $\xi_1^u > 0$. Si tomamos un valor $h < \xi_1^d \wedge \xi_1^u$, consideramos el tiempo τ_1 del primer salto, tenemos que

$$X^{\pi}_{h\wedge\tau_1} = (x+\mu h) I_{h<\tau_1} + (x+\mu h - U_i^d) I_{\tau_1=\tau_1^d \le h} + (x+\mu h + U_i^u) I_{\tau_1=\tau_1^d \le h}$$ y además

$$\begin{aligned} C(x) &\le E_x\left[\int_0^{h\wedge\tau_1} e^{-\delta t} a X_t^{\pi}\, dt + e^{-\delta(h\wedge\tau_1)} C(X^{\pi}_{h\wedge\tau_1})\right] \\ &= E_x\left[\int_0^{h\wedge\tau_1} e^{-\delta t} a X_t^{\pi}\, dt\right] + C(x+\mu h) E_x\left[e^{-\delta h} I_{h<\tau_1}\right] \\ &\quad + E_x\left[e^{-\delta\tau_1^d} C(x+\mu h - U_i^d) I_{\tau_1=\tau_1^d \le h}\right] + E_x\left[e^{-\delta\tau_1^d} C(x+\mu h + U_i^u) I_{\tau_1=\tau_1^u \le h}\right] \end{aligned}$$

Pasando $C(x)$ restando, dividiendo por h y tomando $\lim_{h\to 0}$ obtendríamos (*si* C *fuera derivable en* x) que

$$\mu C'(x) - (\delta + \beta_d + \beta_u) C(x) + \beta_d \int_0^{\infty} C(x-\alpha)\, dF_d(\alpha) + \beta_u \int_0^{\infty} C(x+\alpha)\, dF_u(\alpha) + ax \ge 0$$

Llamamos

$$L(C)(x) = \mu C'(x) - (\delta + \beta_d + \beta_u)C(x) + \beta_d \int_0^\infty C(x-\alpha)dF_d(\alpha) + \beta_u \int_0^\infty C(x+\alpha)dF_u(\alpha) + ax$$

Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

La ecuación de HJB de este problema es

$$\min\left\{E_d(C)(x), E_u(C)(x), L(C)(x)\right\} = 0$$

Vimos que, si C es derivable en x, entonces vale el $\geq$. También se puede probar que:

Resultado 1: C es una *solución viscosa* de la ecuacion de HJB en todo punto. En este caso *supersolución* significa que vale el $\geq$ si reemplazamos derivadas por tangentes de C **por abajo**, y *subsolución* significa que vale el $\leq$ si reemplazamos derivadas por tangentes de C **por arriba**.

Resultado 2: Sea π_x una estrategia admisible, si w es cualquier supersolucion viscosa de la ecuacion de HJB que es localmente Lipschitz y tiene crecimiento lineal k_d en el infinito, entonces

$$C_{\pi_x}(x) \geq w(x).$$

A partir de estos dos resultados concluimos:

Teorema de Caracterización: C es la mayor supersolución (localmente Lipschitz y crecimiento lineal k_d en el infinito) de la ecuación de HJB

Teorema de Verificación: Dada una familia de estrategias admisibles π_x para todo $x \in \mathbf{R}$. Si la función $\overline{C}(x) = C_{\pi_x}(x)$ es una supersolución de la ecuacion de HJB, entonces $\overline{C}(x) = C(x)$.

Función de Valor Optima y Estrategia Optima.

El modo en que la función C resuelve la ecuación de HJB, sugiere cual es la estrategia óptima.

(**1**) En el caso que $E_d(C)(x) = 0$, tenemos que

$$\min_{0 \leq w \leq x} \left(k_d w + K_d + C(x - w) \right) = C(x).$$

Esto significa que la estrategia optima en x sería hacer un depósito de

$$Z^d = \arg \min_{0 \leq w \leq x} \left(k_d w + K_d + C(x - w) \right).$$

Por lo tanto, el efectivo después del depósito sera de $x - Z^d$ con $k_d Z^d + K_d$ como costo de depositar. Z^d debe ser menor o igual a x ya que la cantidad de efectiva debe ser no negativa en todo momento.

Notar que en el nivel x en la que un depósito de tamaño Z^d debe realizarse ($0 = E_d(C)(x)$), tenemos

$$C(x) = k_d Z^d + K_d + C(x - Z^d).$$

Así,

$$C(x) - C(x - Z^d) - k_d Z^d = \int_{x-Z^d}^{x} (C'(s) - k_d) ds = K_d.$$

En el caso en que el costo proporcional por un depósito es $k_d = 0$, esto implica que la integral de C' entre x in el nivel resultante $x - Z^d$ es exactamente el costo fijo K_d. El nivel $x - Z^d$ resultante se llama el "blanco" de la estrategia de depósito en el valor x.

(**2**) En el caso que $E_u(C)(x) = 0$, tenemos que

$$\min_{z\geq 0}\left(k_u z + K_u + C(z+x)\right) = C(x).$$

Esto siginifica que la estrategia óptima sería una extracción de tamaño

$$Z^u = \arg\min_{z\geq 0}\left(k_u z + K_u + C(z+x)\right).$$

Por lo tanto, el nivel de dinero después de este ajuste sería el "blanco" de la estrategia de extracción $x + Z^u$ con un costo de $k_u Z^u + K_u$.

Analogamente al caso de ajuste para abajo, en el caso que ajuste en x sea para arriba de tamaño Z^u, tenemos,

$$C(x) = C(Z^u + x) + k_u Z^u + K_u$$

Así,

$$C(Z^u + x) - C(x) + k_u Z^u = \int_x^{x+Z^u} \left(C'(s) + k_u\right) = -K_u$$

En el caso que el ajuste proporcional por extracción sea $k_u = 0$, la integral of C' entre el punto x y el correspondiente blanco para arriba es igual a menos el costo fijo K_u.

(**3**) Finalmente si en el punto x se satisface que

$$L(C)(x) = 0,$$

entonces no se hace nada. En los conjuntos abiertos donde $L(C) = 0,$ no se realiza ningun control.

Resultados acerca de la Estrategia Optima.

- Se puede partir el conjunto $\mathbf{R}$ en dos cerrados disjuntos $U = \{E_u(C) = 0\}$ y $D = \{E_d(C) = 0\}$, y en un conjunto abierto $NA = (U \cup D)^c$. Si el nivel de efectivo está en U, se hace una extracción hacia un determinado "blanco hacia arriba" que depende de x; si el nivel de efectivo esta en D se hace un depósito hasta "blanco hacia abajo" que depende de x. En el conjunto de no-acción NA no se hace nada.
- Cada componente conexa de U tiene un blanco hacia arriba constante y cada componente conexa de D tiene un blanco hacia abajo constante, estos blancos están en la región NA. Los extremos superiores de las componentes conexas de U se llaman "gatillos para las extracciones" y los extremos inferiores de las componentes conexas de D se llaman "gatillos para depósitos".

- El conjunto $U = (-\infty, 0]$ y hay un solo blanco para arriba s_u. Es decir que el único gatillo para las extracciones es el cero. Se concluye que $C(x)$ es lineal con pendiente $-k_u$ en $(-\infty, 0]$.
- Si $k_d \geq a/\delta$, el conjunto D es vacío y $NA = (0, \infty)$.
- Si $k_d < a/\delta$, el conjunto NA es acotado y hay solo un número finito de blancos para abajo: $s_d^1,\ s_d^2, \ldots, s_d^n$. Se concluye que $C(x)$ es lineal con pendiente k_d en alguna semirecta $[M, \infty)$.
- Si $k_d = k_u = 0$ (solo hay costos fijos), hay un solo blanco s_d^1 para abajo y coincide con el blanco s_u para arriba. Este punto es el $\min(\arg\min_{x \geq 0} C(x))$.

Resultados acerca de la Función de Costo Óptima.

(blancos con s minúscula y gatillos con S mayúscula)

- es continuamente diferenciable, excepto possiblemente en los gatillos. Más aun, las derivadas laterales en los gatillos existen y satisfacen.

$$-k_u = C'(0^-) \geq C'(0^+)(\downarrow)$$

y

$$C'(S_d^{i-}) \geq k_d = C'(S_d^{i+})(\downarrow).$$

Veremos ejemplos donde las derivada tienen saltos en los gatillos.

- También veremos ejemplos donde la funcion C no es ni concava ni convexa.

Conjeturas acerca de la Estrategia Optima.

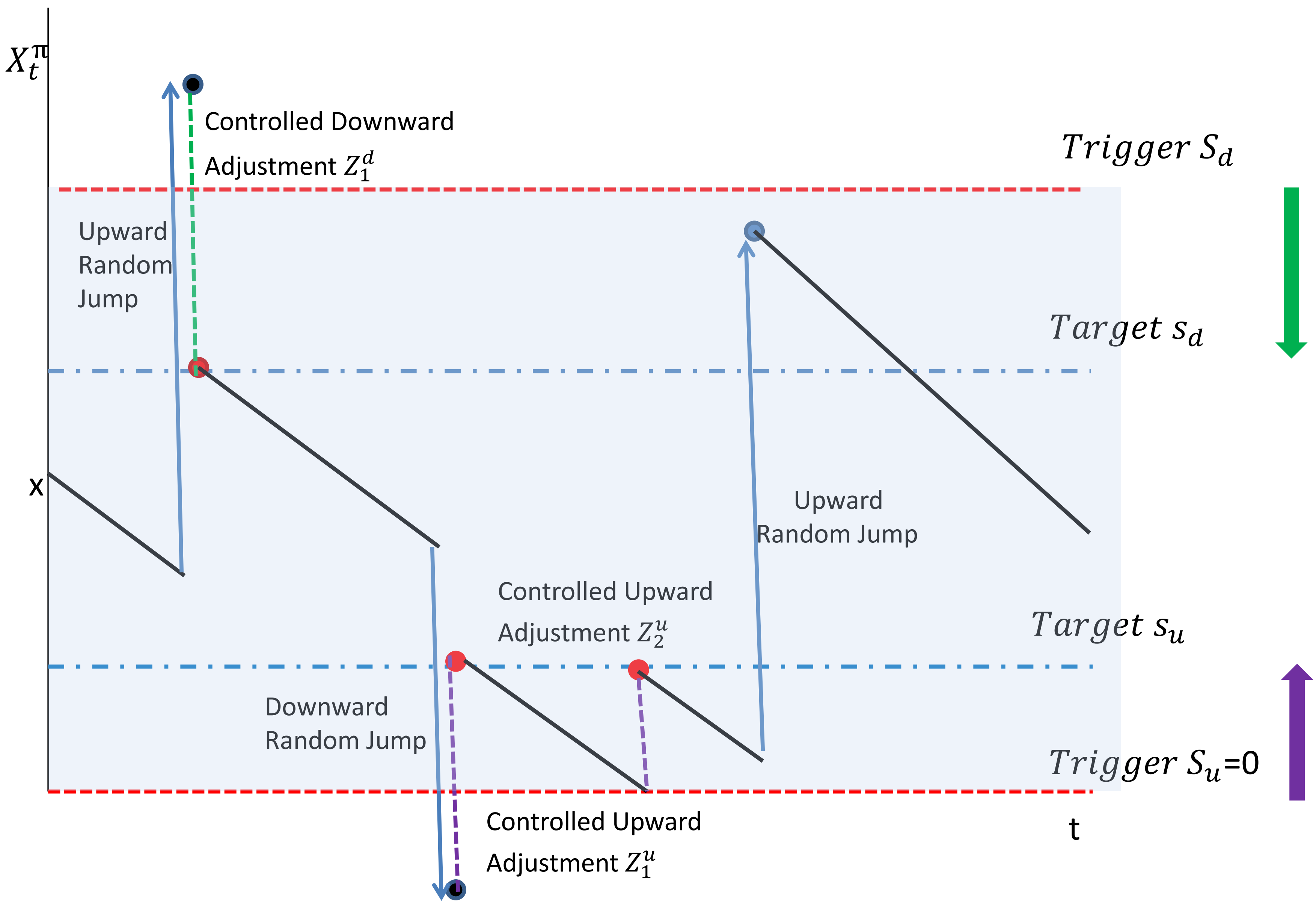
El ejemplo mas simple del tipo de estrategias que describimos antes son las llamadas estrategias con bandas de impulso (ICB). Son caracterizadas por

- Un par de "gatillo-blanco" para abajo (S_d, s_d).
- Un par de "gatillo-blanco" para arriba (S_u, s_u),

con $S_d > s_d \geq s_u > S_u \geq 0$.

Si la cantidad de efectivo está arriba de S_d, ajustar inmediatamente hacia abajo (depósito) hasta el nivel s_d, y si la cantidad de efectivo está por debajo de S_u, ajustar inmediatamente hacia arriba (extracción) hasta el nivel s_u. Con nuestra notación $U = (-\infty, S_u]$, $NA = (S_u, S_b)$ y $D = [S_b, \infty)$.

Simulated Trajectory under an Impulse Band Policy $given\ by\ (S_d, s_d, s_u, S_u)$

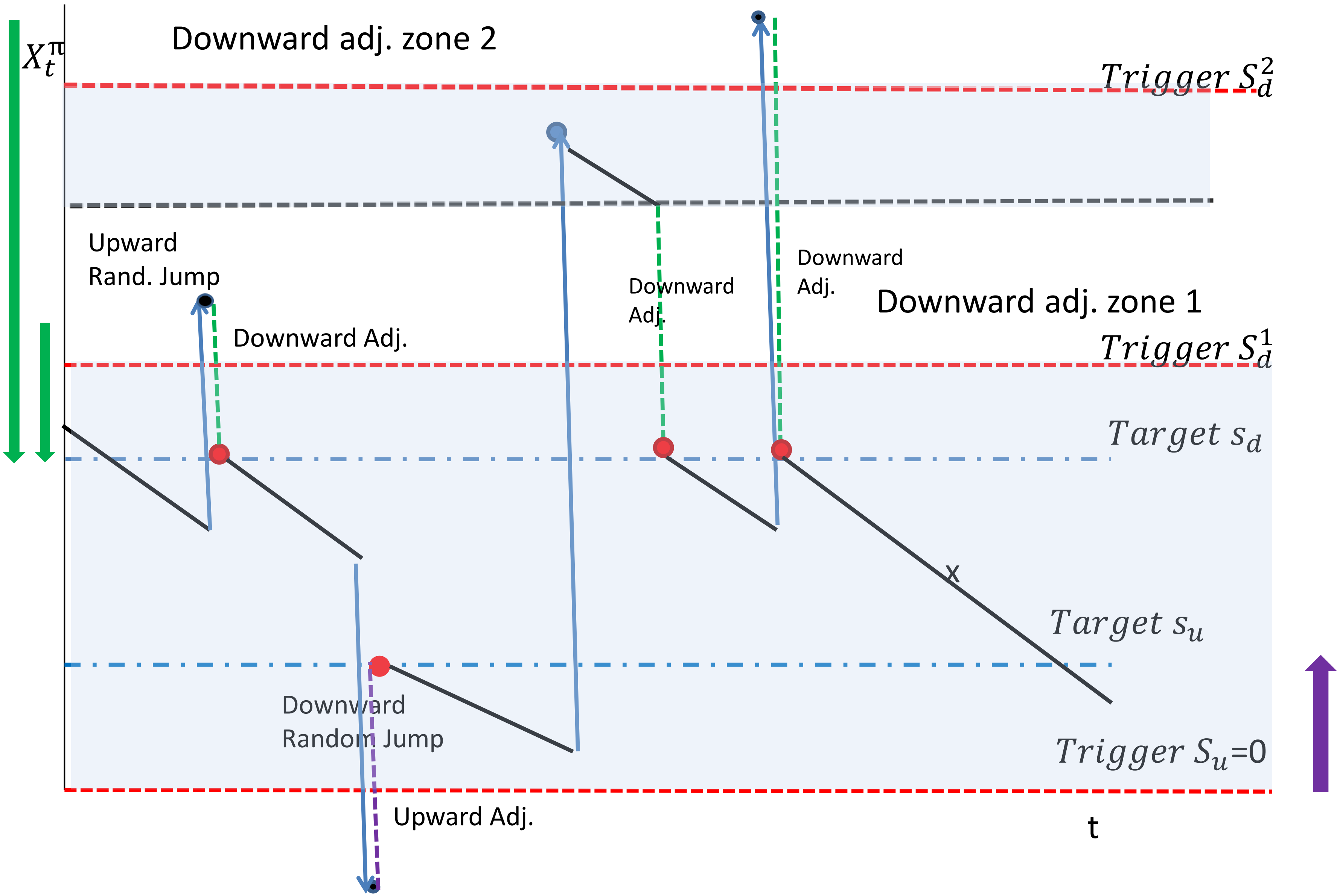


En el caso que el proceso de nivel de efectivo sin control se modela por un movimiento Browniano, Harrison, Sellke and Taylor (1983) probaron que la óptima estrategia es del tipo ICB y obtuvieron los gatillos y blancos óptimos.

Bar-Ilan, Perry and Stadje (2004) consideraron el caso en que el proceso de evolución del nivel de efectivo es una superposicion de un movimiento Browniano con un proceso compuesto de Poisson con saltos para arriba y para abajo. Para el caso en que las distribuciones de los saltos son de "phase-type" (generalizaciones de mezclas de distribuciones exponenciales). En este trabajo, encontraron fórmulas explícitas para las funciones de valor de las estrategias de tipo ICB y encontraron los parámetros óptimos en algunos ejemplos númericos.

Veremos algunos ejemplos donde la estrategia óptima es mas complicada que las del tipo ICB, por ejemplo donde los conjuntos NA y D tienen dos componentes conexas.

2- Band Policy *with two Downward adjustments zones* and one downward target



Examples

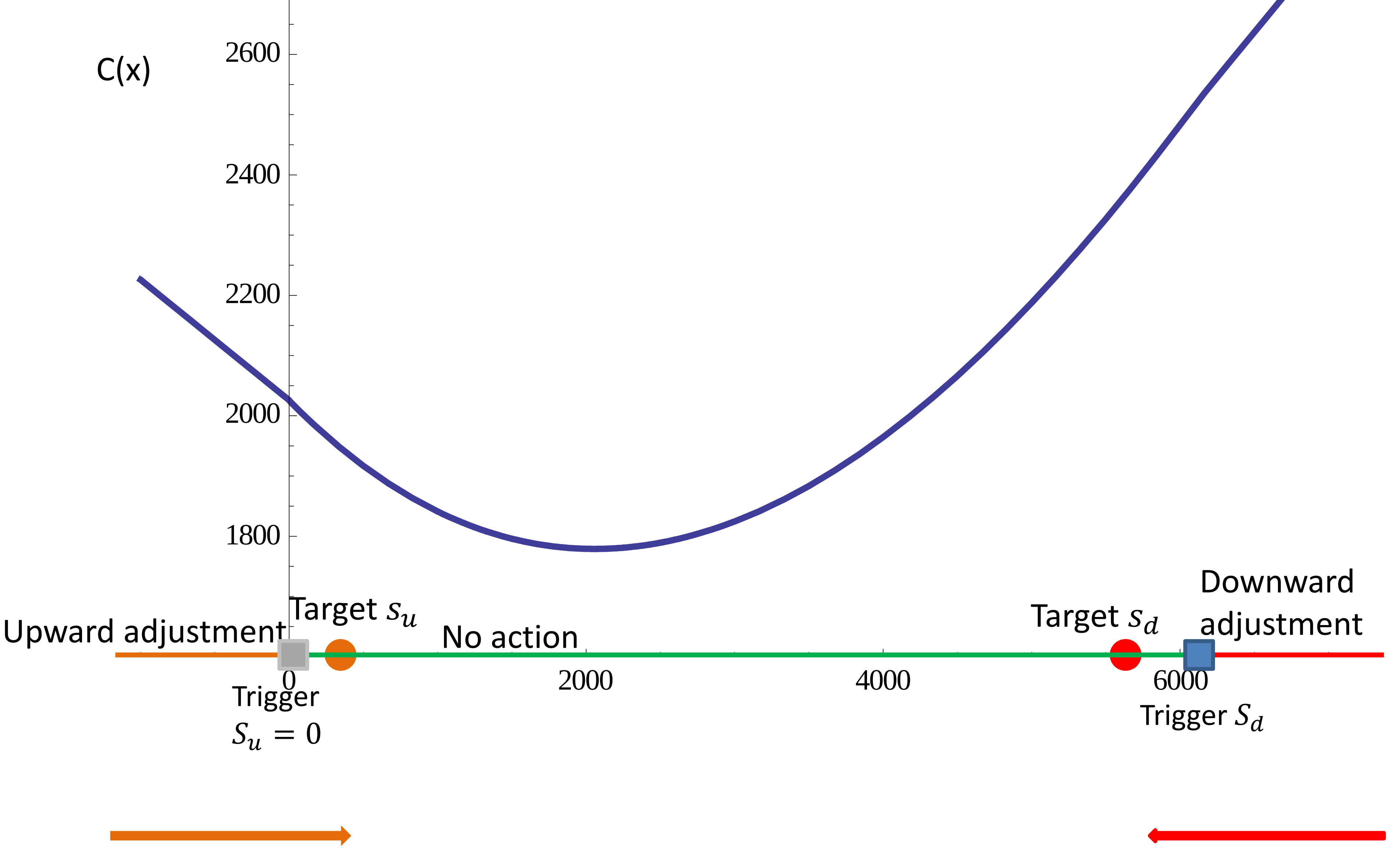
Numerical Example with an ICB optimal policy

Parameters of the example:

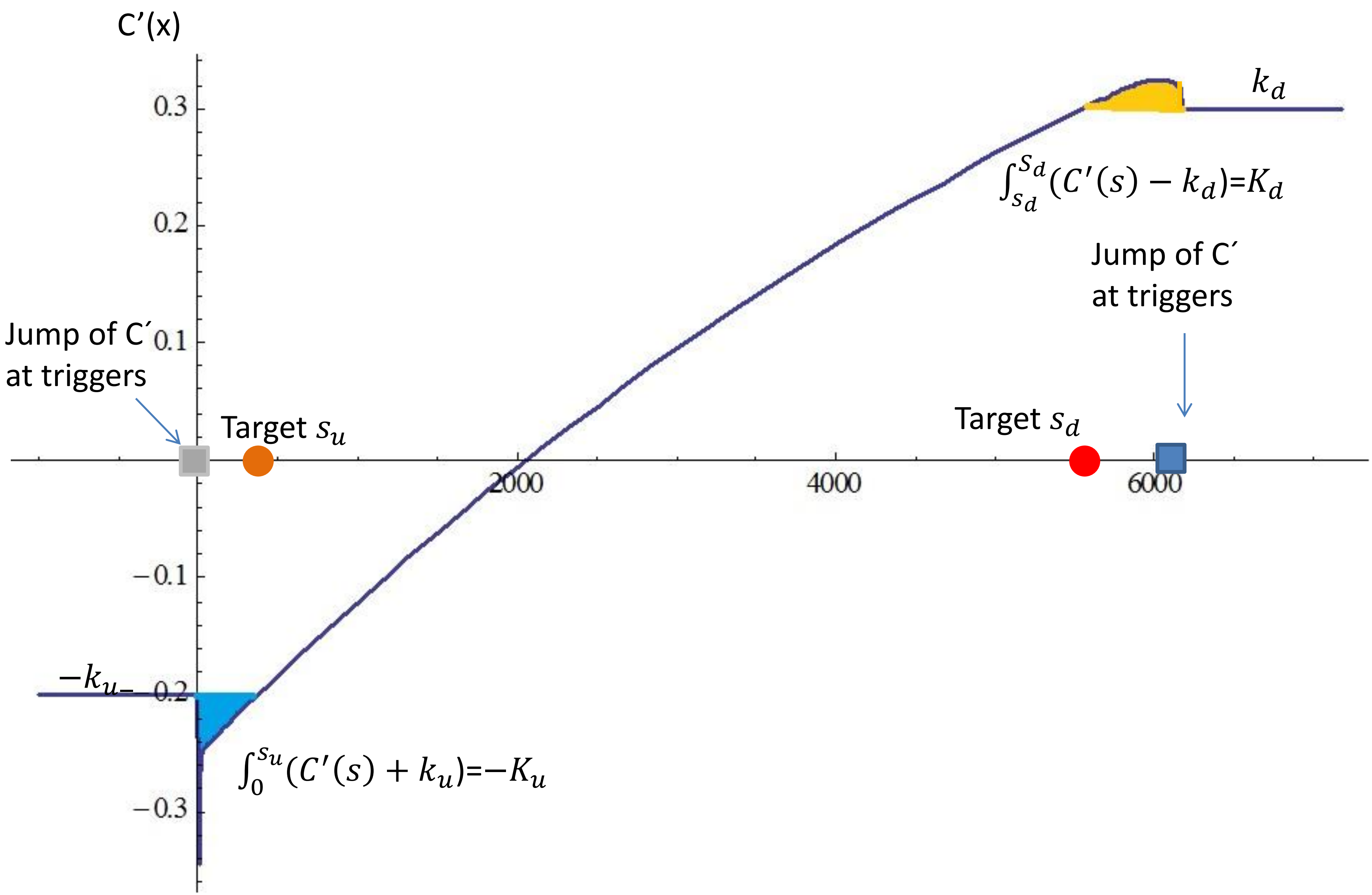
* Downward and upward jumps with exponential distribution functions:
  $F_d(x) = 1 - e^{-0.05x}$, $F_u(x) = 1 - e^{-0.02x}$.
* Discount factor: $\delta = 0.06$.
* drift: $\mu = -365$.
* Poisson intensity: $\beta_d = 30, \beta_u = 10$.
* $a = 0.05, k_u = 0.2$, $k_d = 0.3$, $K_u = K_d = 10$.

We have that:

- The optimal policy is an impulse control band policy (ICB) with
  $S_u = 0, s_u = 372.3$, $s_d = 5551.7, S_d = 6172.4$



C(x)
2600
2400
2200
2000
1800
Target s_u
Upward adjustment
No action
Target s_d
Downward adjustment
0
2000
4000
6000
Trigger $S_u = 0$
Trigger S_d



C′(x)
0.3
0.2
0.1
−0.1
−0.2
−0.3
2000
4000
6000
k_d
$\int_{s_d}^{S_d}(C'(s) - k_d)$=$K_d$
Jump of C′
at triggers
Jump of C′
at triggers
Target s_u
Target s_d
$-k_u$
$\int_0^{s_u}(C'(s) + k_u)$=$-K_u$

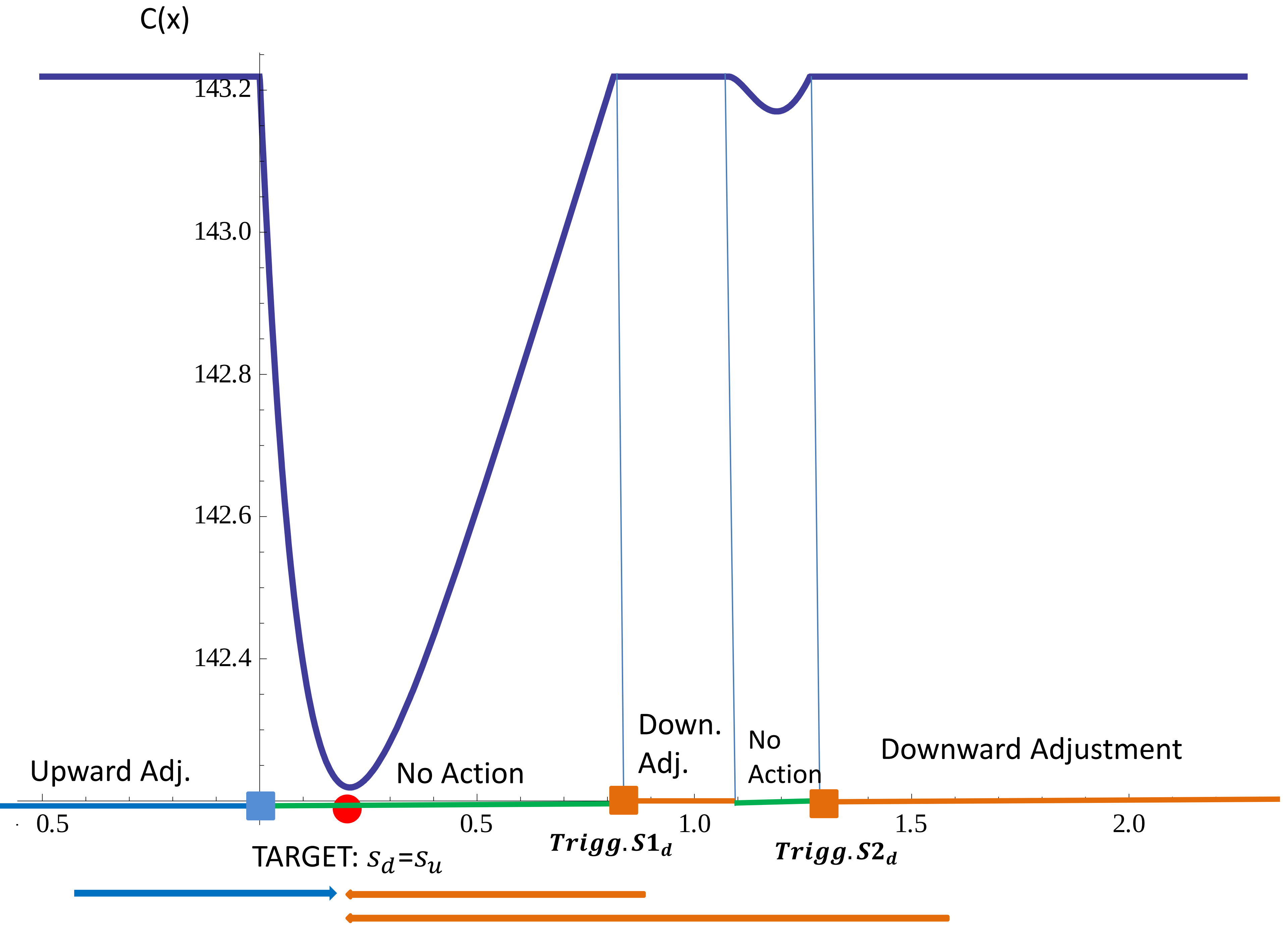
Numerical Example with two downward triggers

Parameters of the example:

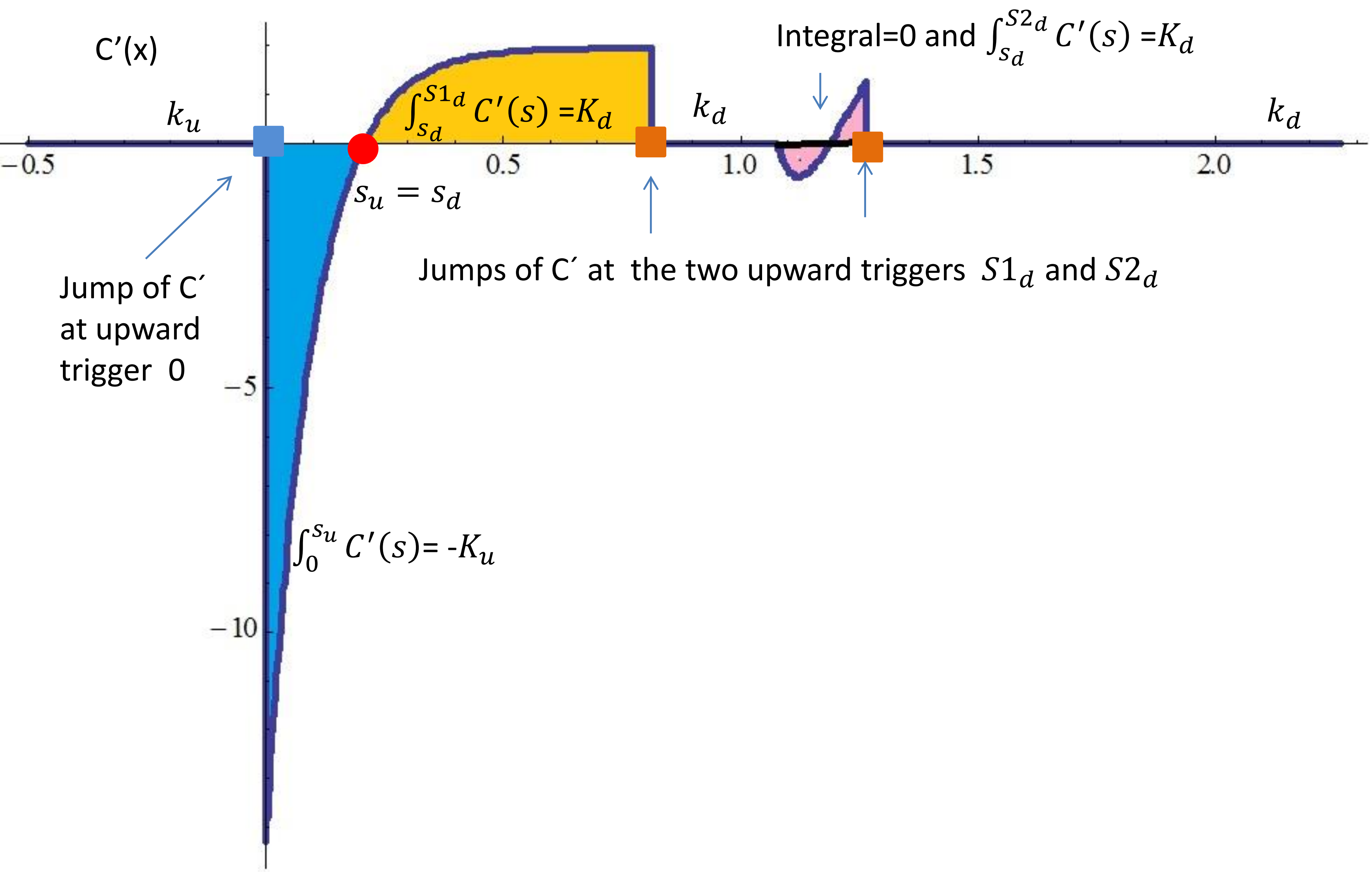
* Downward jumps with distribution function $F_d(x) = I_{x \geq 1}$ and exponential distribution for the upward jumps $F_u(x) = 1 - e^{-x}$.
* Discount factor: $\delta = 0.1$, drift: $\mu = -1$.
* Poisson intensity: $\beta_d = 10, \beta_u = 0.1$.
* $a = 20$, $k_u = k_d = 0$ (no proportional costs for cash adjustments), $K_u = K_d = 1$.

We have,

- The upward trigger $S_u = 0$, the downward and upward targets are $s_d = s_u = 0.2$ and correspond to the the minimum of C (because the proportional transaction costs are zero).
- There are two downward triggers $S_d^1 = 0.8$ and $S_d^2 = 1.3$. Furthermore, the non-action regions are given by $(0, S_d^1) \cup (1.1, S_d^1)$. So the optimal policy is not ICB.



C(x)
143.2
143.0
142.8
142.6
142.4
Upward Adj.
No Action
Down.
Adj.
No
Action
Downward Adjustment
0.5
0.5
1.0
1.5
2.0
$\boldsymbol{Trigg.S1_d}$
$\boldsymbol{Trigg.S2_d}$
TARGET: s_d=s_u


C′(x)
k_u
$\int_{s_d}^{S1_d} C'(s)$ =K_d
k_d
Integral=0 and $\int_{s_d}^{S2_d} C'(s)$ =K_d
k_d
−0.5
0.5
1.0
1.5
2.0
$s_u = s_d$
Jumps of C´ at the two upward triggers $S1_d$ and $S2_d$
Jump of C´ at upward trigger 0
−5
$\int_0^{s_u} C'(s)$= -K_u
−10

Some Related References

Inventory

- Presman, E. and Sethi, S. P. (2006). Inventory models with continuous and Poisson demands and discounted and average costs. Prod. Oper. Manag.
- Benkherouf and Bensoussan (2009) .Optimality of an (s; S) policy with compound Poisson and diffusion demands: a quasi-variational inequalities approach. SIAM J. Control Optim.
- Alvarez and Lippi (2013). The demand of liquid assets with uncertain lumpy expenditures. Journal of Monetary Economics.
- Yamasaki K. (2016). Inventory Control for Spectrally Positive Lévy Demand Processes. Mathematics of Operation Research.

Multidimensional framework:

- Baccarin (2009). Optimal impulse control for a multidimensional cash management system with generalized cost functions. European Journal of

Operational Research.

- Davis , Guo, and Wu. (2010). Impulse control of multidimensional jump diffusions, SIAM Journal on Control and Optimization.
- Bayraktar, Emmerling and Menaldi (2013). On the Impulse Control of Jump Diffusions. SIAM J. Control Optim.

Muchas gracias.