Teorema de Compacidad

Seminario de Teoría de Modelos - FCEyN - UBA

1 de septiembre de 2011

Teorema 1 (Compacidad). *Una $\mathcal{L}$-teoría T es satisfacible si y solo si todo subconjunto finito de T es satisfacible.*

El teorema de Completitud de Gödel [2] dice que $T \models \varphi$ sii $T \vdash \varphi$. Usando este resultado, es directo probar Compacidad. En efecto, como consecuencia del teorema de Completitud tenemos que T es satisfacible si y solo si T es consistente. La implicación de izquierda a derecha del Teorema 1 es trivial. Para la implicación de derecha a izquierda, supongamos que T es insatisfacible. Entonces T es inconsistente, y por lo tanto existe φ tal que $T \vdash \varphi$ y $T \vdash \neg\varphi$. Sea Δ el conjunto de fórmulas de T que aparecen en ambas derivaciones. Como las derivaciones son finitas, Δ también lo es. Así, $\Delta \vdash \varphi$ y $\Delta \vdash \neg\varphi$, de modo que Δ es inconsistente y luego es insatisfacible.

Las secciones 1 y 2 están basadas en [4]. Las aplicaciones de la sección 3 están basadas en [4] y [1].

1. El teorema de Compacidad

En esta sección probamos el Teorema de Compacidad de manera puramente semántica, es decir, sin hablar de sistemas deductivos.

Definición 1. Una $\mathcal{L}$-teoría es *finitamente satisfacible* si todo subconjunto finito de T es satisfacible.

El Teorema de Compacidad se reduce a probar que si T es finitamente satisfacible entonces T es satisfacible. Informalmente, el argumento tendrá tres pasos. Primero probaremos que, dado un lenguaje $\mathcal{L}$ y una $\mathcal{L}$-teoría T, podemos extender $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}^*$ y extender T a T^* de modo que T^* siga siendo finitamente satisfacible pero además tenga testigos, es decir contenga ciertas fórmulas que que atestigüen las fórmulas existenciales por medio de constantes. El segundo paso será extender T^* a una teoría maximal T' que siga siendo finitamente satisfacible y siga teniendo testigos. El último paso será la construcción de un modelo $\mathcal{M}$ de T'. Este modelo $\mathcal{M}$ restringido al lenguaje original $\mathcal{L}$ será un modelo para T. En las secciones 1.1, 1.2 y 1.3 se formalizan estos tres pasos.

1.1. Paso 1: agregar testigos

Definición 2. Decimos que la $\mathcal{L}$-teoría T *tiene testigos* si para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x)$ con una variable libre x existe un símbolo de constante c en $\mathcal{L}$ tal que $(\exists x.\varphi(x)) \rightarrow \varphi(c) \in T$.

Claramente, si una $\mathcal{L}$-teoría tiene testigos, cualquier extensión de ella sobre $\mathcal{L}$ también tiene testigos.

Lema 1. *Sea T una $\mathcal{L}$-teoría finitamente satisfacible. Hay un lenguaje $\mathcal{L}^* \supseteq \mathcal{L}$ y una $\mathcal{L}^*$-teoría $T^* \supseteq T$ que es finitamente satisfacible y tiene testigos. Podemos elegir $\mathcal{L}^*$ tal que $|\mathcal{L}^*| = |\mathcal{L}| + \aleph_0$.*

Demostración. Primero probamos que existe $\mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}$ y una $\mathcal{L}_1$-teoría finitamente satisfacible $T_1 \supseteq T$ tal que para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x)$ hay un símbolo de constante c en $\mathcal{L}_1$ tal que $(\exists x.\varphi(x)) \to \varphi(c) \in T_1$. Para cada $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x)$ sea c_φ un nuevo símbolo de constante. Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \mathcal{L} \cup \{c_\varphi \mid \varphi \text{ es } \mathcal{L}\text{-fórmula}\} \\ T_1 &= T \cup \{\psi_\varphi \mid \varphi(x) \text{ es } \mathcal{L}\text{-fórmula}\}, \end{aligned}$$

donde ψ_φ es la $\mathcal{L}_1$-fórmula $(\exists x.\varphi(x)) \to \varphi(c_\varphi)$.

Veamos que T_1 es finitamente satisfacible. Sea $\Delta \subseteq T_1$ finito. Entonces $\Delta = \Delta_0 \cup \{\psi_{\varphi_1}, \dots, \psi_{\varphi_n}\}$ para algún $\Delta_0 \subseteq T$ finito. Como T es finitamente satisfacible, existe $\mathcal{M} \models \Delta_0$. Extendemos $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}'$ sobre $\mathcal{L}_1$. De $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}'$ solo cambiamos la interpretación de los nuevos símbolos c_φ, de manera que $\mathcal{M}' \models \Delta_0$. Interpretamos los nuevos símbolos de esta manera: si $\mathcal{M} \models \exists x.\varphi(x)$, elegir algún $a \in M$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ y definir $c_\varphi^{\mathcal{M}'} = a$. Si no, definir c_φ como cualquier elemento de M. Claramente $\mathcal{M}' \models \psi_\varphi$ para cualquier $\mathcal{L}$-fórmula φ, de modo que T_1 es finitamente satisfacible.

Ahora iteramos la construcción anterior para obtener una secuencia de lenguajes $\mathcal{L} \supseteq \mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_2 \supseteq \dots$ y una secuencia de teorías $T \supseteq T_1 \supseteq T_2 \supseteq \dots$, donde T_i es una $\mathcal{L}_i$-teoría finitamente satisfacible tal que si $\varphi(x)$ es una $\mathcal{L}_i$-formula entonces hay un símbolo de constante $c \in \mathcal{L}_{i+1}$ con $(\exists x.\varphi(x)) \to \varphi(c) \in T_{i+1}$.

Definamos $\mathcal{L}^* = \bigcup_i \mathcal{L}_i$ y $T^* = \bigcup_i T_i$. Por construcción, T^* tiene testigos. Si $\Delta \subseteq T^*$ es finito, entonces $\Delta \subseteq T_i$ para algún i. Entonces Δ es satisfacible y por lo tanto T^* es finitamente satisfacible.

Si llamamos T_0 a T y $\mathcal{L}_0$ a $\mathcal{L}$, es fácil ver que en T_i hay $|\mathcal{L}_i| + \aleph_0$ fórmulas para $i \geq 0$. Por inducción se prueba que $|\mathcal{L}^*| = |\mathcal{L}| + \aleph_0$. □

1.2. Paso 2: maximizar

Definición 3. Una $\mathcal{L}$-teoría es *maximal* si para toda sentencia φ de $\mathcal{L}$, $\varphi \in T$ o $\neg\varphi \in T$.

El siguiente lema dice que cualquier teoría maximal y finitamente satisfacible está cerrada por consecuencia lógica restringida al caso finito:

Lema 2. *Sea T una $\mathcal{L}$-teoría maximal y finitamente satisfacible y φ una $\mathcal{L}$-sentencia. Si $\Delta \subseteq T$ es finito y $\Delta \models \varphi$ entonces $\varphi \in T$.*

Demostración. Si $\varphi \notin T$, por ser T maximal, tenemos $\neg\varphi \in T$. Pero $\Delta \cup \{\neg\varphi\} \subseteq T$ es finito e insatisfacible, de manera que T no es finitamente satisfacible. □

Lema 3. *Si T es una $\mathcal{L}$-teoría finitamente satisfacible y φ es una $\mathcal{L}$-sentencia entonces $T \cup \{\varphi\}$ es finitamente satisfacible o bien $T \cup \{\neg\varphi\}$ es finitamente satisfacible.*

Demostración. Supongamos que $T \cup \{\varphi\}$ no es finitamente satisfacible. Entonces existe un conjunto finito $\Delta \subseteq T$ tal que $\Delta \models \neg\varphi$. Veamos que $T \cup \{\neg\varphi\}$ es finitamente satisfacible. Sea $\Sigma \subseteq T$ finito. Como $\Delta \cup \Sigma$ es satisfacible y $\Delta \cup \Sigma \models \neg\varphi$, $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible. Luego $T \cup \{\neg\varphi\}$ es finitamente satisfacible. $\square$

El siguiente corolario usa el lema de Zorn, que dice si en un conjunto parcialmente ordenado P, toda cadena tiene una cota superior en P, entonces P tiene al menos un elemento maximal.

Corolario 1. *Si T es una $\mathcal{L}$-teoría finitamente satisfacible entonces existe una $\mathcal{L}$-teoría finitamente satisfacible maximal $T' \supseteq T$.*

Demostración. Sea I el conjunto de todas las $\mathcal{L}$-teorías finitamente satisfacibles que contienen a T. Ordenamos a I por inclusión. Si $C \subseteq I$ es una cadena, llamamos $T_C = \bigcup\{\Sigma \mid \Sigma \in C\}$. Si $\Delta \subseteq T_C$ es finito entonces existe $\Sigma \in C$ tal que $\Delta \subseteq \Sigma$. Como Σ es finitamente satisfacible, Δ es satisfacible y por lo tanto T_C es finitamente satisfacible. Además, $T_C \supseteq \Sigma$ para toda $\Sigma \in C$. Entonces toda cadena en I tiene una cota superior en I. Por el Lema de Zorn, existe $T' \in I$ maximal con respecto a la inclusión. Como $T' \in I$, T' resulta finitamente satisfacible y contiene a T. Por el Lema 3, $T' \cup \{\varphi\}$ o $T' \cup \{\neg\varphi\}$ es finitamente satisfacible. Como T' es maximal con respecto a $\subseteq$, φ o $\neg\varphi$ está en T'. Luego T' es una teoría maximal. $\square$

1.3. Paso 3: construir el modelo

Lema 4. *Sea T una $\mathcal{L}$-teoría con testigos, maximal y finitamente satisfacible. Entonces T tiene un modelo. Es más, si α es un cardinal y $\mathcal{L}$ tiene a lo sumo α símbolos de constante, entonces existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models T$ y $|M| \leq \alpha$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de constantes de $\mathcal{L}$. Para $c, d \in \mathcal{C}$ definimos

$$c \sim d \quad \text{sii} \quad c = d \in T.$$

Hecho 1. *$\sim$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. Como $\models c = c$ entonces $c = c \in T$. Supongamos $c = e, e = d \in T$. Como $\{c = e, e = d\} \models c = d$, por Lema 2, $c = d \in T$. Con un argumento similar se prueba que $c = e \in T$ sii $e = c \in T$. $\square$

Definimos el modelo $\mathcal{M}$ de esta manera:

- El universo: el universo de $\mathcal{M}$ será $M = \mathcal{C}/\sim$, las clases de equivalencia de $\mathcal{C}$ módulo $\sim$. Llamamos c^* a la clase de c. Observar que $|M| \leq \alpha$.
- Interpretación de los símbolos de constante: si c es una constante entonces:
$$c^{\mathcal{M}} = c^*.$$
- Interpretación de los símbolos de relación: si R es n-aria, entonces
$$R^{\mathcal{M}} = \{(c_1^*, \ldots, c_n^*) \mid R(c_1, \ldots, c_n) \in T\}.$$

  Veamos que $R^{\mathcal{M}}$ está bien definida. Si $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n \in \mathcal{C}$ y $c_i \sim d_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ entonces, por Lema 2, $R(c_1, \ldots, c_n) \in T$ sii $R(d_1, \ldots, d_n) \in T$.

- Interpretación de la función f: si f es n-aria, entonces

$$f^{\mathcal{M}}(c_1^*, \dots c_n^*) = d^* \quad \text{sii} \quad f(c_1, \dots, c_n) = d \in T.$$

Veamos que $f^{\mathcal{M}}$ está bien definida. Sabemos que $\models \exists x. f(c_1, \dots, c_n) = x$. Como T tiene testigos, existe $c \in \mathcal{C}$ tal que $(\exists x. f(c_1, \dots, c_n) = x) \to f(c_1, \dots, c_n) = c \in T$. Por Lema 2, $f(c_1, \dots, c_n) = c \in T$. Por un argumento similar, si $c_i \sim d_i$ para $i = 1, \dots, n$ y $c \sim d$ tenemos $f(d_1, \dots, d_n) = d \in T$. Es más, como f es un símbolo de función, si $e_i \sim c_i$ para $i = 1, \dots, n$ y $f(e_1 \dots, e_n) = e \in T$ entonces $e \sim c$.

Hecho 2. *Supongamos que t es un término con variables libres entre $x_1, \dots, x_n$. Si $c_1, \dots, c_n, d \in \mathcal{C}$ entonces $t(c_1, \dots, c_n) = d \in T$ sii $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \dots, c_n^*) = d^*$.*

Demostración. Probamos ($\Rightarrow$) por inducción en los términos.

- Si t es la constante c, entonces $c = d \in T$ y por lo tanto $c \sim d$. Como $c^{\mathcal{M}} = c^*(c_1^*, \dots, c_n^*) = c^*$, tenemos $c^* = d^*$.
- Si t es la variable x_i, entonces $t(c_1, \dots, c_n)$ es c_i. Por hipótesis, $c_i = d \in T$ y por lo tanto $c_i \sim d$. Entonces $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \dots, c_n^*) = c_i^* = d^*$.
- Si t es una función aplicada a constantes, i.e. $t = f(d_1, \dots, d_m)$ para $d_1, \dots, d_n \in \mathcal{C}$, entonces $t(c_1, \dots, c_n)$ es t y $f^{\mathcal{M}}(c_1^*, \dots, c_m^*)$ es $f^{\mathcal{M}}(d_1^*, \dots d_m^*)$. Si $f(d_1, \dots, d_m) = d \in T$. Entonces, por construcción, $f^{\mathcal{M}}(d_1^*, \dots, d_m^*) = d^*$.
- Si t es de la forma $f(t_1, \dots, t_m)$, con $t_1, \dots, t_m$ $\mathcal{L}$-términos. Como T tiene testigos y por Lema 2, existen $d, d_1, \dots, d_n \in \mathcal{C}$ tal que $t_i(c_1, \dots, c_n) = d_i \in T$ para $i = 1, \dots, n$ y $f(d_1, \dots, d_m) = d \in T$. Por hipótesis inductiva, $t_i^{\mathcal{M}}(c_1^*, \dots, c_n^*) = d_i^*$ y $f^{\mathcal{M}}(d_1^*, \dots, d_m^*) = d^*$. Luego $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \dots, c_n^*) = d^*$.

Para ($\Leftarrow$), supongamos $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \dots, c_n^*) = d^*$. Como T tiene testigos y por el Lema 2, existe $e \in \mathcal{C}$ tal que $t(c_1, \dots, c_n) = e \in T$. Por la parte ($\Rightarrow$), $t^{\mathcal{M}}(c_1^*, \dots, c_n^*) = e^*$. Entonces $e^* = d^*$ y por lo tanto $e = d \in T$. Así, concluimos que $t(c_1, \dots, c_n) = d \in T$. □

Hecho 3. *Para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ y $d_1, \dots, d_n \in \mathcal{C}$, $\mathcal{M} \models \varphi(c_1^*, \dots, c_n^*)$ si y solo si $\varphi(c_1, \dots, c_n) \in T$.*

Demostración. Por inducción en las fórmulas.

- Supongamos que φ es $t_1 = t_2$ para $\mathcal{L}$-términos t_1, t_2. Como T tiene testigos y por el Lema 2, existen $d_1, d_2 \in \mathcal{C}$ tal que $t_i(c_1, \dots, c_n) = d_i \in T$ para $i = 1, 2$. Por el Hecho 2, $t_i^{\mathcal{M}}(c_1^*, \dots, c_n^*) = d_i^*$ para $i = 1, 2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \varphi(c_1^*, \dots, c_n^*) &\Leftrightarrow d_1^* = d_2^* \\
&\Leftrightarrow d_1 = d_2 \in T && \text{(por def. de } \sim) \\
&\Leftrightarrow t_1(c_1, \dots, c_n) = t_2(c_1, \dots, c_n) \in T && \text{(por Lema 2)}
\end{aligned}$$

- Supongamos que φ es $R(t_1, \ldots, t_m)$. Entonces

$$\varphi(c_1, \ldots, c_n) = R(t_1(c_1, \ldots, c_n), \ldots, t_m(c_1, \ldots, c_n)).$$

Como T tiene testigos y por Lema 2, existen $d_1, \ldots, d_m \in \mathcal{C}$ tal que $t_i(c_1, \ldots, c_n) = d_i \in T$ para $i = 1, \ldots, m$. Por el Hecho 2, $t_i^{\mathcal{M}}(c_1^*, \ldots, c_n^*) = d_i^*$ para $i = 1, \ldots, m$. Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi(c_1^*, \ldots, c_n^*) &\Leftrightarrow (d_1^*, \ldots, d_n^*) \in R^{\mathcal{M}} \\ &\Leftrightarrow R(d_1, \ldots, d_m) \in T && \text{(por def. de } R^{\mathcal{M}}) \\ &\Leftrightarrow R(t_1(c_1, \ldots, c_n), \ldots, t_n(c_1, \ldots, c_n)) \in T && \text{(por Lema 2)} \\ &\Leftrightarrow \varphi(c_1 \ldots, c_m) \in T \end{aligned}$$

- Supongamos que φ es $\neg\psi$.

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi(c_1^*, \ldots, c_n^*) &\Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \psi(c_1^*, \ldots, c_n^*) \\ &\Leftrightarrow \psi(c_1, \ldots, c_n) \notin T && \text{(por hip. ind.)} \\ &\Leftrightarrow \varphi(c_1, \ldots, c_n) \in T && \text{(porque } T \text{ es maximal)} \end{aligned}$$

- Supongamos que φ es $\psi \wedge \rho$.

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi(c_1^*, \ldots, c_n^*) &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi(c_1^*, \ldots, c_n^*) \text{ y } \mathcal{M} \models \rho(c_1^*, \ldots, c_n^*) \\ &\Leftrightarrow (\psi \wedge \rho)(c_1, \ldots, c_n) \in T && \text{(por hip. ind. y Lema 2)} \\ &\Leftrightarrow \varphi(c_1, \ldots, c_n) \in T \end{aligned}$$

- Supongamos que φ es $\exists x.\psi(x)$. Entonces $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$ es $\exists x.\psi(x, c_1, \ldots, c_n)$. Por un lado

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi(c_1^*, \ldots, c_n^*) &\Rightarrow \text{existe } d \in \mathcal{C} \text{ tal que } M \models \psi(d^*, c_1^*, \ldots, c_n^*) \\ &\Rightarrow \psi(d, c_1, \ldots, c_n) \in T && \text{(por hip. ind.)} \\ &\Rightarrow \exists x.\psi(x, c_1, \ldots, c_n) \in T && \text{(por Lema 2)} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \varphi(c_1, \ldots, c_n) \in T &\Rightarrow \text{existe } d \in \mathcal{C} \text{ tal que } \psi(d, c_1, \ldots, c_n) \in T \\ & && (T \text{ tiene testigos y Lema 2}) \\ &\Rightarrow \mathcal{M} \models \psi(d^*, c_1^*, \ldots, c_n^*) && \text{(por hip. ind.)} \\ &\Rightarrow \mathcal{M} \models \exists x.\psi(c_1^*, \ldots, c_n^*) \\ &\Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi(c_1^*, \ldots, c_n^*) \end{aligned}$$

$\square$

Esto concluye la demostración del Lema 4 $\square$

2. Compacidad fuerte y teoremas de Löwenheim-Skolem

El siguiente es una versión fuerte del teorema de Compacidad:

Teorema 2. *Si T es una $\mathcal{L}$-teoría finitamente satisfacible y α es un cardinal infinito tal que $\alpha \geq |\mathcal{L}|$, entonces hay un modelo de T de cardinal a lo sumo α.*

Demostración. Por el Lema 1, existe $\mathcal{L}^* \supseteq \mathcal{L}$ con $|\mathcal{L}^*| \leq \alpha$ y existe una $\mathcal{L}^*$-teoría $T^* \supseteq T$ que es finitamente satisfacible y tiene testigos. Por el Corolario 1, existe una $\mathcal{L}^*$-teoría $T' \supseteq T^*$ que es finitamente satisfacible y maximal. Recordar que si una teoría tiene testigos, entonces cualquier extensión sobre el mismo lenguaje también. Por lo tanto, T' tiene testigos y el Lema 4 garantiza la existencia de un modelo de T' de cardinal a lo sumo α. □

Teorema 3. *Si T es una $\mathcal{L}$-teoría con modelos infinitos y $\alpha \geq |\mathcal{L}|$ es un cardinal infinito, entonces existe un modelo de T de cardinalidad α.*

Demostración. Sea $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{c_\beta \mid \beta < \alpha\}$, donde cada c_β es un nuevo símbolo de constante, y sea T^* la $\mathcal{L}^*$-teoría

$$T \cup \{c_\beta \neq c_\gamma \mid \beta, \gamma < \alpha, \beta \neq \gamma\}.$$

Si $\mathcal{M} \models T^*$ entonces M tiene cardinalidad α como mínimo, pues debe interpretar α constantes con distintos elementos. Por el Teorema 2, basta probar que T^* es finitamente satisfacible. Si $\Delta \subseteq T^*$ es finito, entonces $\Delta \subseteq T \cup \{c_\beta \neq c_\gamma \mid \beta \neq \gamma, \beta, \gamma \in I\}$, donde I es algún subconjunto finito de α. Por hipótesis, T tiene un modelo infinito $\mathcal{M}$. Podemos interpretar los símbolos de constante $\{c_\beta \mid \beta \in I\}$ como $|I|$ elementos distintos de M (e interpretar el resto de los nuevos símbolos con cualquier elemento de M). Como $\mathcal{M} \models \Delta$, concluimos que T^* es finitamente satisfacible. □

El Teorema 3 implica el teorema original de Löwenheim [3] que dice que si una sentencia tiene modelo entonces tiene modelo finito o infinito numerable. En su forma más moderna el enunciado del teorema de Löwenheim-Skolem es más general y más fuerte que esta última aserción. El teorema se suele dividir en dos partes: una que dice que cualquier modelo tiene subestructuras elementales de cualquier cardinalidad infinita más chica (a esta parte se la llama *descendente* y otra que dice que cualquier modelo tiene extensiones elementales de cualquier cardinalidad más grande (a esta parte se la llama *ascendente*).

Antes de enunciar formalmente los teoremas de Löwenheim-Skolem, probamos el siguiente lema:

Definición 4. Si $\mathcal{M}$ es una $\mathcal{L}$-estructura, llamamos $\mathcal{L}_M$ al lenguaje que resulta de agregar a $\mathcal{L}$ una nueva constante por cada elemento de M. El *diagrama atómico* de $\mathcal{M}$ es

$$\begin{aligned}\mathrm{Diag}(\mathcal{M}) \quad = \quad & \{\varphi(m_1, \ldots, m_n) \mid \mathcal{M} \models \varphi(m_1, \ldots, m_n) \text{ y } \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-fórmula atómica o} \\ & \text{la negación de una atómica}\}\end{aligned}$$

El *diagrama elemental* de $\mathcal{M}$ es

$$\mathrm{Diag}_{\mathrm{el}}(\mathcal{M}) \quad = \quad \{\varphi(m_1, \ldots, m_n) \mid \mathcal{M} \models \varphi(m_1, \ldots, m_n) \text{ y } \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-fórmula}\}$$

Lema 5. *1) Sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura y sea $\mathcal{N}$ una $\mathcal{L}_M$-estructura tal que $\mathcal{N} \models \mathrm{Diag}(\mathcal{M})$. Entonces hay un embedding de $\mathcal{M}$ a la restricción de $\mathcal{N}$ a $\mathcal{L}$. 2) Si $\mathcal{N} \models \mathrm{Diag}_{\mathrm{el}}(\mathcal{M})$ entonces hay un embedding elemental de $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$.*

Demostración. Para 1), sea $g : M \to N$ definido como $j(m) = m^{\mathcal{N}}$, es decir, $g(m)$ es la interpretación del símbolo de constante m de $\mathcal{L}_M$ en $\mathcal{N}$. Si $m_1, m_2 \in M$ son distintos, entonces $m_1 \neq m_2 \in \mathrm{Diag}(\mathcal{M})$. Entonces $g(m_1) \neq g(m_2)$, de modo que g es un inyectiva. Si f es un símbolo de función de $\mathcal{L}$ y $f^{\mathcal{M}}(m_1, \dots, m_n) = m$ entonces $f(m_1, \dots, m_n) = m \in \mathrm{Diag}(\mathcal{M})$ y $f^{\mathcal{N}}(g(m_1), \dots, g(m_n)) = g(m)$. Si R es un símbolo de relación n-ario de $\mathcal{L}$ y $(m_1, \dots, m_n) \in R^{\mathcal{M}}$, entonces $R(m_1, \dots, m_n) \in \mathrm{Diag}(\mathcal{M})$ y $(g(m_1), \dots, g(m_n)) \in R^{\mathcal{N}}$. De este modo, g es un embedding.

Para 2), si $\mathcal{N}' \models \mathrm{Diag}_{\mathrm{el}}(\mathcal{M})$ entonces g es elemental. □

Teorema 4 (Löwenheim-Skolem ascendente)**.** *Sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura infinita y α un cardinal infinito tal que $\alpha \geq |M| + |\mathcal{L}|$. Entonces existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{N}$ de cardinalidad α tal que hay un embedding de $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ –y por lo tanto $\mathcal{N}$ es isomorfo a una extensión elemental de $\mathcal{M}$.*

Demostración. Como $\mathcal{M} \models \mathrm{Diag}_{\mathrm{el}}(\mathcal{M})$, entonces $\mathrm{Diag}_{\mathrm{el}}(\mathcal{M})$ es una teoría con modelos infinitos. Por el Teorema 3, existe un modelo $\mathcal{N}$ de de cardinalidad α tal que $\mathcal{N} \models \mathrm{Diag}_{\mathrm{el}}(\mathcal{M})$. Por el Lema 5, hay un embedding de $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$. □

Teorema 5 (Löwenheim-Skolem descendente)**.** *Sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura infinita y sea $X \subseteq M$. Entonces existe un submodelo elemental $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ tal que $X \subseteq N$ y $|N| \leq |X| + |\mathcal{L}| + \aleph_0$.*

3. Aplicaciones

Proposición 1. *Existen modelos no estándar de la teoría de números completa –i.e. el conjunto de sentencias que valen en el modelo estándar de $\mathbb{N}$ sobre el lenguaje $\{+, \cdot, S, 0\}$.*

Demostración. Como la teoría de números completa tiene un modelo infinito, por el Teorema 3, tiene modelos de cualquier cardinalidad infinita. Un modelo no numerable de la teoría de números no puede ser estándar. □

El teorema de Compacidad puede servir para demostrar que ciertas clases de modelos no son elementales. Razonamos por al absurdo así: suponemos que $\mathcal{K}$ es una clase de modelos sobre un cierto lenguaje $\mathcal{L}$ y consideremos una $\mathcal{L}$-teoría T tal que para cualquier modelo $\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{L}$ tenemos $\mathcal{M} \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{M} \models T$. Si encontramos un modelo $\mathcal{N}$ tal que $\mathcal{N} \models T$ pero $\mathcal{N} \notin \mathcal{K}$, entonces la clase $\mathcal{K}$ no es elemental (porque la implicación $\mathcal{M} \in \mathcal{K} \Leftarrow \mathcal{M} \models T$ no es cierta). Para encontrar este modelo $\mathcal{N}$ podemos razonar así: definimos un conjunto de fórmulas T' sobre un cierto $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ tal que 1) $T \cup T'$ es finitamente satisfacible y 2) si $\mathcal{N}' \models T \cup T'$ entonces $\mathcal{N}'$ restringido a $\mathcal{L}$ no pertenece a $\mathcal{K}$. Por compacidad existirá un modelo $\mathcal{N}$ tal que su restricción a $\mathcal{L}$ satisface T pero no pertenece a la clase $\mathcal{K}$. Las siguientes Proposiciones 2 y 3 son aplicaciones de compacidad que se prueban siguiendo este tipo de argumentación.

Proposición 2. *Si T tiene modelos finitos arbitrariamente grandes entonces T tiene modelos infinitos.*

Demostración. Sea $\varphi_n = \exists x_1, \dots, x_n. \bigwedge_{i<j} x_i \neq x_j$. Claramente $\mathcal{M} \models \varphi$ sii M tiene al menos n elementos. Definamos $T' = T \cup \{\varphi_n \mid n \geq 2\}$ y tomemos un subconjunto finito $\Delta \subseteq T'$. Sea m el máximo i tal que $\varphi_i \in \Delta$. Como T tiene modelos arbitrariamente grandes, existe un $\mathcal{M}$ con más de m elementos tal que $\mathcal{M} \models T$. Por Compacidad T' es satisfacible por un modelo $\mathcal{N}$. Como $\mathcal{N} \models \varphi_n$ para todo n, N es necesariamente infinito. □

Corolario 2. *La clase de modelos finitos no es elemental.*

Demostración. Supongamos que existe T tal que $\mathcal{M}$ es finito sii $\mathcal{M} \models T$. Como T admite modelos finitos arbitrariamente grandes, por la Proposición 2, T tendría un modelo infinito y esto es un absurdo. $\square$

Observar que la clase de modelos infinitos sí es elemental: para las fórmulas φ_n definidas en la demostración de la Proposición 2, $\mathcal{M} \models \{\varphi_n \mid n \geq 2\}$ sii $\mathcal{M}$ es infinito. Sin embargo, la clase de modelos infinitos no es una clase básica elemental, i.e. no existe una sentencia φ tal que $\mathcal{M} \models \varphi$ sii $\mathcal{M}$ es infinito. Si existiera tal φ, la clase de modelos finitos seria elemental via $\{\neg\varphi\}$. Observar que con un símbolo de función f es posible forzar modelos infinitos (expresar que f es inyectiva y no suryectiva).

Proposición 3. *Sea $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ y sea T una $\mathcal{L}$-teoría que tiene como modelos a cuerpos con característica finita arbitrariamente grande. Entonces T tiene como modelo un cuerpo de característica 0.*

Demostración. Sea T' la $\mathcal{L}$-teoría de los cuerpos y consideremos la $\mathcal{L}$-teoría

$$\Sigma = T \cup T' \cup \{\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p} \neq 0 \mid p \text{ es primo}\}.$$

Cualquier conjunto finito $\Sigma' \subseteq \Sigma$ involucra un máximo primo p. Sea $\mathcal{M}$ un cuerpo de característica mayor que p tal que $\mathcal{M} \models T$. Como $\mathcal{M}$ es un cuerpo, $\mathcal{M} \models T'$. Por lo tanto $\mathcal{M} \models \Sigma'$. Por Compacidad, Σ tiene modelo, y este modelo será un cuerpo de característica 0 que satisface T. $\square$

Corolario 3. *La clase de los cuerpos de característica no cero no es elemental.*

Observar que la clase de cuerpos de característica cero sí es elemental.

Proposición 4. *Existen cuerpos ordenados no arquimedianos elementalmente equivalentes al cuerpo ordenado de los números reales.*

Demostración. Un cuerpo ordenado $\langle F, +, \cdot, 0, 1, \leq\rangle$ es arquimediano sii para $a, b \in F$ positivos, existe un n tal que

$$\underbrace{a + \cdots + a}_{n} \geq b.$$

Veremos que esto no es expresable en primer orden.

Sea T la teoría de todas las $\mathcal{L}$-sentencias que valen en el cuerpo ordenado de los números reales, donde $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1, \leq\}$. Sea c un símbolo distinto a 0 y 1. Sea

$$\Sigma = T \cup \{\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} \leq c \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada $\Sigma' \subseteq \Sigma$ finito existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Sigma'$. Este modelo es el modelo de los reales en donde el símbolo de constante c se interpreta con un real suficientemente grande. Por Compacidad Σ tiene un modelo $\mathcal{N}$. En $\mathcal{N}$ valen todas las sentencias del cuerpo ordenado de los reales, tanto $1^{\mathcal{N}}$ como $c^{\mathcal{N}}$ son positivos y sin embargo ningún múltiplo finito de $1^{\mathcal{N}}$ excede $c^{\mathcal{N}}$. $\square$

Corolario 4. *La clase de cuerpos ordenados arquimedianos no es elemental. La clase de cuerpos ordenados no arquimedianos tampoco.*

Referencias

[1] Chen Chung Chang and H. Jerome Keisler. *Model Theory*. North Holland, 1990.

[2] Kurt Gödel. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Math. u. Phys.*, 37(1):1930, 349–360.

[3] Leopold Löwenheim. Über Möglichkeiten im Relativkalkül. *Mathematische Annalen*, 76:447–470, 1915.

[4] David Marker. *Model Theory: An Introduction*. Springer, 2002.