$\mathfrak{n}-$COMOLOGÍA Y ESPACIOS $K(\Gamma,1)$

JORGE VARGAS

Abstract. En esta nota presentamos una versión detallada de la conferencia dictada en el congreso Rioplatense de Matemática llevado a cabo en Buenos Aires y sobre el tema indicado en el título.

1. Grupos de Lie semisimples y espacios $K(\Gamma,1)$.

Sea $G(\mathbb{R})$ el conunto de puntos reales de un grupo algebraico semisimple definido sobre $\mathbb{R}$.
Ejemplos de tales groups son: $SL_N(\mathbb{R})$ el grupo de matríces $N\times N$ a coeficientes reales; $SO(p,q), N=p+q$ el subgrupo de matrices de $SL_N(\mathbb{R})$ que dejan invariante una forma bilineal simétrica del tipo $x_1^2+\cdots+x_p^2-y_1^2-\cdots-y_q^2$; $SU(p,q), N=p+q$, el grupo de matrices complejas $N\times N$ que deja invariante la forma hermiteana $z_1\bar{z}_1+\cdots, z_p\bar{z}_p-w_1\bar{w}_1-\cdots-w_q\bar{w}_q$. Una lista completa de los grupos de Lie simples, salvo cubrimientos, se encuentra en [2].
El rango real de $G(\mathbb{R})$ es, por definición, el mayor número d tal que $d-$copias del grupo multiplicativo de los números reales positivos está contenido en $G(\mathbb{R})$. Esto es, el rango real es la dimension máxima de los toros split de $G(\mathbb{R})$. Por ejemplo, para $SL_{N+1}(\mathbb{R})$ el subgrupo de matrices diagonales cuyos coeficientes son todos no negativos es isomorfo a N copias de $\mathbb{R}_{>0}$. De esto, rango real de $SL_{N+1}(\mathbb{R})$ es mayor o igual a N. Se demuestra que es precisamente N. Para $SO(p,q), SU(p,q), p\geq q$, el rango real es q.
Sin ser demasiado estricto, se puede asegurar que los grupos de Lie semisimples se realizan como los puntos reales de un grupo algebraico semisimple definido sobre $\mathbb{Q}$. Sea $G(\mathbb{R})\subset GL_N(\mathbb{R})$ un grupo semisimple del cual marcamos una estructura algebraica definida sobre $\mathbb{Q}$, fijemos un $\mathbb{Q}-$subespacio lineal $V_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{R}^N$ tal que su dimensión es N y es invariantes por el grupo $G(\mathbb{Q})$ de puntos de G sobre $\mathbb{Q}$. Para cada lattice L en $V_{\mathbb{Q}}$ (subgrupo libre sobre $\mathbb{Z}$ de rango N) sea $G_L=$la totalidad de elementos de $G(\mathbb{Q})$ que transforman L sobre si misma. Es fácil mostrar que G_L es un subgrupo discreto de $G(\mathbb{R})$.

En [2] se encuentra una demostración de que si Γ es un subgrupo discreto de $G(\mathbb{R})$ entonces existe una medida de Radon en $G(\mathbb{R})/\Gamma$ que es invariante ante la totalidad de traslaciones $\tau_g(x\Gamma)=gx\Gamma, g\in G, x\in G$. Borel y Harish-Chandra [2] han mostrado que el volúmen del espacio $G(\mathbb{R})/G_L$ es finito.

Partially supported by CONICET, FONCYT, SECYTUNC (Argentina), ICTP (Trieste).
Keywords Espacios $K(\Gamma,1), \mathfrak{n}-$comología MSC1991 Primary 22E46.

Definición 1. *Un subgrupo discreto* Γ *de* $G(\mathbb{R})$ *se dice aritmético si existen* $V_{\mathbb{Q}}, L$ *de modo que los índices* $[\Gamma, \Gamma \cap G_L], [G_L, \Gamma \cap G_L]$ *son finitos. Por consiguiente, la medida* $G(\mathbb{R})$ *invariante* $G(\mathbb{R})/\Gamma$ *tiene volúmen total finito.*

Teorema 1. *Margulis,* [6] *. Supongamos que* $G(\mathbb{R})$ *simple y que el rango real de* $G(\mathbb{R})$ *es mayor o igual a dos, (*$N \geq 3$*, para* $SL_N; q \geq p \geq 2$ *para* $SO(p,q), SU(p,q)$*). Si* Γ *es un subgrupo discreto* $G(\mathbb{R})$ *de modo que la medida invariante en* $G(\mathbb{R})/\Gamma$ *es finita. Entonces* Γ *es aritmético.*

Cada grupo semisimple $G(\mathbb{R})$ posee subgrupos maximales entre los subgrupos compactos. Denotemos por K uno de ellos. Un teorema [2] afirma que el espacio cociente $G(\mathbb{R})/K$ con la topología cociente es homeomorfo a un espacio euclideano. Para el caso de $G = SL_N(\mathbb{R})$ un subgrupo maximal compacto es $SO(N)$ y el espacio cociente se lo identifica naturalmente al cono de matrices reales $N \times N$ definidas positivas, por medio de la aplicación $xSO(N) \to xx^T$. Por tanto, el espacio cociente es homeomorfo a un espacio euclideano. En realidad este hecho implica la maximalidad de $SO(N)$.

Un ejercicio sencillo consiste en mostrar si Γ es un subgrupo discreto de $G(\mathbb{R})$ sin torsion, entonces la accion de Γ en G/K definida por $\tau_\gamma(xK) = \gamma xK, \gamma \in \Gamma, x \in G(\mathbb{R})$, es sin puntos fijos y properly discontinuously de modo que el espacio cociente $\Gamma \setminus G(\mathbb{R})/K$ es una variedad topológica (en realidad smooth) y que la proyección

$$G(\mathbb{R})/K \to \Gamma \setminus G(\mathbb{R})/K$$

es un cubrimiento.

Por lo tanto, como el espacio $G(\mathbb{R})/K$ es contractible se tiene que el espacio topológico cociente $\Gamma \setminus G(\mathbb{R})/K$ es un ejemplo de espacio $K(\Gamma, 1)$. Un problema es el cálculo de su homología.

Cuando Γ tiene torsion Borel [2] ha desmostrado que posee subgrupos de indice finito sin torsión y el espacio cociente resulta una $V-$manifold.
Por lo tanto, poseemos muchos ejemplos de espacios $K(\Gamma, 1)$ provenientes de la teoría de grupos algebraicos. Para disipar dudas sobre si en realidad se producen muchos ejemplos de espacios $K(\Gamma, 1)$ Mostow y Margulis [6] han mostrado el siguiente

Teorema 2. *Sean* $\Gamma \subset G(\mathbb{R}), \Gamma' \subset G'(\mathbb{R})$ *sendos subgrupos discretos de covolumen finito. Supongamos que los grupos reales son simples, los rangos reales de ambos grupos son mayores o igual a dos y que* Γ *y* Γ' *son isomorfos como grupos abstractos. Entonces los grupos* $G(\mathbb{R})$ *y* $G'(\mathbb{R})$ *son "isomorfos". Esto es, son localmente isomorfos y el morfismo que lo realiza extiende el isomorfismo abstracto de los subgrupos. En particular, si ambos grupos discretos son subgrupos de un mismo grupo, entonces son conjugados. Esto no sucede en* $SL_2(\mathbb{R}), SO(n,1), SU(n,1)$.

2. Comologia de subgrupos discretos

Un objetivo es calcular la cohomologia a coeficientes complejos de los espacios $\Gamma \backslash G(\mathbb{R})/K$. En [2],[6] se encuentran una demostraciones del siguiente:

Teorema 3. *Sea $G(\mathbb{R})$ de rango real mayor o igual a dos. Sea Γ un subgrupo aritmético de $G\mathbb{R})$. Entonces un subgrupo normal de Γ es finito o de índice finito. El subgupo commutador de Γ tiene índice finito.*

De manera que bajo la hipótesis del teorema

$$H^1(\Gamma \setminus G(\mathbb{R})/K, \mathbb{C}) = \Gamma/[\Gamma,\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = 0.$$

Para el cálculo de los grupos de comología $H^i(\Gamma \setminus G(\mathbb{R})/K, \mathbb{C})$ Matsushima ha demostrado una fórmula que reduce dicho problema a el cómputo de comología de álgebras de Lie. Describimos dicha fórmula y bosquejamos su prueba. Para describir la fórmula hacemos la hipótesis

$$\Gamma \setminus G(\mathbb{R}) \; es\, un\, espacio\, compacto.$$

En lugar de calcular la comología a coeficientes complejos, es conveniente calcular la comología a coeficientes en una representación de dimensión finita E del grupo $G(\mathbb{R})$. La fórmula de Matsushima involucra: representaciones unitarias irreducibles V_π de $G(\mathbb{R})$; el conjunto de clases de equivalencias de representaciones unitarias e irreducibles $\hat{G}$ de $G(\mathbb{R})$; enteros no negativos $n(\Gamma, V_\pi)$; y la comología relativa $H^\star(\mathfrak{g}, K, M)$ de una representación M de $\mathfrak{g}$, donde $\mathfrak{g}$ denota el álgebra de Lie de $G(\mathbb{R})$. El haz de secciones localmente constantes de $E \times_\Gamma G/K \to \Gamma \setminus G/K$ es denotado por $\mathcal{L}_E$. Los ingredientes serán descriptos en detalle a continuación de la fórmula.

Teorema 4. *Matsushima* [1]

$$H^i(\Gamma, E) = H^i(\Gamma \setminus G(\mathbb{R})/K, \mathcal{L}_E) = \sum_{\pi \in \hat{G}} n(\Gamma, V_\pi)\; H^i(\mathfrak{g}, K, V_\pi \otimes E).$$

Como el espacio $\Gamma \setminus G(\mathbb{R})/K$ es compacto, un teorema de Gelfand afirma que la representación unitaria definida por traslaciones a derecha por elementos de $G(\mathbb{R})$ en $L^2(\Gamma \setminus G(\mathbb{R}))$ es completamente reducible y que la multiplicidad de cada factor irreducible es finita. El número

$$n(\Gamma, V_\pi) := Hom_G(V_\pi, L^2(\Gamma \setminus G(\mathbb{R}))$$

es tambien de interés en teoría de números [1]. Como $\Gamma \setminus G(\mathbb{R})$ es un espacio compacto, las funciones constantes pertenecen a $L^2(\Gamma \setminus G(\mathbb{R}))$ de manera que

$$n(\Gamma, \mathbb{C}) = 1$$

Sea $\mathfrak{k}$ el álgebra de Lie de K. Para SL_N el álgebra de Lie consiste de todas las matríces de traza nula y el álgebra de Lie de $SO(N)$ es el álgebra de matríces antisimétricas. Un modo de determinar la comología relativa es calculando la comología del complejo

$$C^\star(\mathfrak{g}, K, M) = Hom_K(\Lambda^\star(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), M)$$

con operador de borde

$$\begin{aligned} d\omega(\bar{X}_1, \cdots, \bar{X}_r) & \\ &= \sum_{i=1}^{r} (-1)^i X_i \omega(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_r) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \cdots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_r). \end{aligned}$$

Una definición de la comología relativa a partir de funtores derivados se encuentra en [1].
La demostración de la fórmula se la hace recordando que la comología en cuestion se calcula por medio del complejo de formas diferenciales a valores en E. Esto es, aplicando el teorema de deRham. El complejo de formas diferenciales a coeficientes en E es

$$Hom_{\mathbb{R}}(\Lambda^\star(T(\Gamma \setminus G(\mathbb{R})/K), E),$$

Como tenemos las proyecciones naturales

$$G(\mathbb{R}) \to G(\mathbb{R})/K \to \Gamma \setminus G(\mathbb{R})/K$$

el complejo de formas diferenciales en $\Gamma \setminus G(\mathbb{R})/K$ es "pulled-back" a un sub complejo del complejo de formas diferenciales en $G(\mathbb{R})$. Por otra parte, $G(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie, por tanto, como variedad diferenciable es paralelizable. Mas precisamente el complejo de formas diferenciables de $G(\mathbb{R})$ es isomorfo al complejo

$$Hom_{\mathbb{R}}(\Lambda^\star(\mathfrak{g}), C^\infty(G) \otimes E)$$

la diferencial exterior resulta el operador de coborde para comología. Todas las formas en el subcomplejo que se obtiene por "pull-back" de las formas en la variedad $\Gamma \setminus G/K$ resultan invariantes a derecha por K y a izquierda por Γ por lo tanto "caen" a elementos del complejo

$$Hom_{\mathbb{R}}(\Lambda^\star(\mathfrak{g}), C^\infty(\Gamma \setminus G(\mathbb{R})) \otimes E)$$

que son invariantes por la acción a derecha de K. El subcomplejo resultante es exactamente el subcomplejo que permite calcular la comología relativa de $C^\infty(\Gamma \setminus G) \otimes E$. La acción de G es por traslación a derecha en $C^\infty(\Gamma \setminus G)$ y por π en E. Esto es, es el subcomplejo

$$C^\star(\mathfrak{g}, K, C^\infty(\Gamma \setminus G) \otimes E) = \{w \in Hom_{\mathbb{R}}(\Lambda^\star(\mathfrak{g}), C^\infty(\Gamma \setminus G) \otimes E) : w..........\}$$

Ahora como

$$C^\infty(\Gamma \setminus G) = \sum_{\pi \in \hat{G}} n(\Gamma, \pi) V_\pi$$

y comología commuta con sumas directas se tiene la fórmula de Matsushima. Detalles en [1], [3].

De ahora en mas y para el resto de la nota suponemos que $G(\mathbb{R})$ es conexo. En el próximo párrafo desglosamos la contribución de la representación trivial en la fórmula de Matsushima. Para esto recordamos un resultado en [1], [5] Prop. 9.4.3.

Proposición 1. *Para una representación unitaria e irreducible de $G(\mathbb{R})$ se tiene que*

$$H^i(\mathfrak{g}, K, V \otimes E) = Hom_K(\Lambda^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), V \otimes E).$$

El operador de borde es el trivial! Este teorema puede ser enunciado de otros modos el cual se expresa en lenguaje de caracter infinitesimal de una representación. La dificultad de este ataque del cálculo de la comología relativa reside en que no se conoce la estructura de $K-$módulo de $\Lambda^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$, salvo para álgebras de dimensión pequeña o familias muy particulares de álgebras como por ejemplo $\mathfrak{s}o(p,1), \mathfrak{s}u(p,1)$. Además tampoco se conoce en detalle fino la estructura de $K-$módulo de tanto las representaciones unitarias e irreducibles de $G(\mathbb{R})$ como de las representaciones de dimensión finita E de G.

Si aplicamos Prop. 1 para la representación trivial $V = \mathbb{C}$, como $\mathbb{C} \otimes E = E$ se obtiene,

$$H^i(\mathfrak{g}, K, E) = Hom_K(\Lambda^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), E)$$

Por otra parte, todo par $G(\mathbb{R})), K$ esta acompañado de un par dual consistente de un grupo de Lie compacto U que contiene al subgrupo K. Para el caso de $G = SL_N(\mathbb{R}), K = SO(N)$ el par dual es $U = SU(N), K = SO(N)$; para $G = SO(p,q), K = SO(p) \times SO(q)$ se tiene que $U = SO(p+q)$ y el espacio homogéneo U/K se identifica con la variedad de los subespacios lineales de dimensión p en $\mathbb{R}^{p+q}$; como último ejemplo para $G = SU(p,q)$ el espacio homogéneo U/K es homeomorfo al grasmaniano de $p-$planos en $\mathbb{C}^{p+q}$. Sin anestesia, formulamos un resultado que proviene de varias décadas atrás,

Proposición 2.

$$H^i(U/K, \mathbb{C}) = H^i(\mathfrak{g}, K, \mathbb{C}).$$

Por manera que arribamos a el resultado que motivo a Matsushima para la obtención de su fórmula

Proposición 3. *Para todo i*

$$H^i(U/K, \mathbb{C}) \hookrightarrow H^i(\Gamma \setminus G(\mathbb{R})/K, \mathbb{C}).$$

Como conocemos en detalle la comología de los grasmanianos, tenemos para cada subgrupo aritmético Γ de $SU(p,q)$ que

$$H^{2r}(\Gamma \setminus SU(p,q)/K, \mathbb{C}) \neq 0,$$

para $r = 0, 1, 2, \cdots \leq \frac{1}{2} dim SU(p,q)/K$.

Sobre la contribución a la comología

$$H^\star(\Gamma, E) = H^\star(\Gamma \setminus G(\mathbb{R})/K, E)$$

por parte de las otras representaciones unitarias se tiene

Teorema 5. *Borel-Wallach, Schmid, Zuckerman* [1] [3]. *Existe una constante* $c := c(G(\mathbb{R}))$ *mayor o igual al rango real de* $G(\mathbb{R}))$ *de modo para toda representación unitaria, irreducible distinta de la representación trivial, vale*

$$H^i(g, K, V \otimes E) = 0, para\, 0 \leq i < c.$$

El valor de la constante esta tabulado en [5]. Para $SL_{N+1}(\mathbb{R})$, $c = N$; Para $G = Sp(p,q), p \geq q, N = 2q$ dos veces el rango real q. Una consecuencia de este teorema es

Teorema 6. *Para cualquier subgrupo cocompacto* Γ *de* $G(\mathbb{R})$, E *representación de dimensión finita y* $0 \leq i < c(G(\mathbb{R}))$ *se tiene*

$$H^i(\Gamma \setminus G(\mathbb{R})/K, \mathbb{C}) = H^i(U/K, \mathbb{C}) = Hom_K(\Lambda^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \mathbb{C})$$

En particular, para $G = SU(p,q), p \leq q$, $c = p$ y por tanto

$$H^i(\Gamma \setminus SU(p,q)/K, \mathbb{C}) = H^i(Gras_p(\mathbb{C}^{p+q}), \mathbb{C}), \quad 0 \leq i < p.$$

A modo ilustrativo mencionamos dos teoremas cuya demostración puede ser consultada en [1], 6.6.

Teorema 7. *Sea* E *de peso máximo* $\lambda - \rho$ *de modo que* $\theta\lambda \neq \lambda$. *Entonces* $H^i(\Gamma, E) = 0$, $\forall\, i$.

Teorema 8. *Supongamos que el rango de* K *es igual al rango de* G, *por ejemplo* $G = SO(2p, 2q+\epsilon), \epsilon \in \{0,1\}$. *Ademas suponemos* λ *es fuertemente dominante con respecto a las raíces de* K. *Entonces, existe una constante* $d > 0$ *de modo que*

$$H^j(\Gamma, E) = \begin{cases} |W^1| dVol(\Gamma \setminus G), & si\ 2j = dimG/K \\ 0, & de\ lo\ contrario \end{cases}$$

Por ejemplo, si $(\lambda, \alpha) >> 0$ para toda raíz compacta, se satisface la hipótesis.

3. Comología relativa y $\mathfrak{n}-$comología

En la próxima seccion presentaremos un teorema de anulación de $\mathfrak{n}-$comología. En esta sección mostramos como una sucesión espectral conlleva la anulación de la comología relativa enunciada en Teorema 5
Para demostrar Teorema 5 Schmid diagramó las etapas siguientes:

a) Demostrar $H^i(\mathfrak{n}, V \otimes E) = 0, i < c(G)$.

b) $H^i(\mathfrak{n}, V \otimes E) = 0, i < R$ implica $Ext^i_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \times_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda, V \otimes E) = 0, \forall\lambda, i < R$

c) $Ext^i_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \times_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda, V \otimes E) = 0, \forall\lambda, i < R$ implica $H^i(\mathfrak{g}, V \otimes E) = 0, i < R$

d)$H^i(\mathfrak{g}, V \otimes E) = 0, i < R$ implica $H^i(\mathfrak{g}, K, V \otimes E) = 0, i < R$.

Comenzemos recordando que para cada representación M de un álgebra de Lie $\mathfrak{s}$ la comología $H^\star(\mathfrak{s}, M)$ se calcula a partir del complejo $C^\star(\mathfrak{s}, M) = Hom_{\mathbb{C}}(\Lambda^\star(\mathfrak{s}), M)$ con operador de coborde que se asemeja a la diferencial exterior. Cuando M es una representación de dimensión finita de un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{s}$ se tiene que

Proposición 4.

$$H^i(\mathfrak{s},M) = Hom_{\mathfrak{s}}(\mathbb{C},M)\otimes\Lambda^i(\mathfrak{s})^{\mathfrak{s}}$$

Donde $\mathbb{C}$ indica la representación trivial de $\mathfrak{s}$ y $V^{\mathfrak{s}}$ denota el subespacio de elementos invariantes. En particular, si M es una representación irreducible no trivial, entonces su comología se anula identicamente.

Lema 1. *Sea M una representación unitaria e irreducible de $G(\mathbb{R})$ o mas generalmente $M = V\otimes E$ para V una representación unitaria e irreducible. Existe una sucesión espectral que converge a*

$$H^\star(\mathfrak{g},M)$$

cuyo término E_2 es

$$E_2^{p,q} = H^q(\mathfrak{k},M\otimes\Lambda^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})).$$

En efecto, en general, existe un subespacio lineal $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ de modo que $[\mathfrak{k},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$. Para el caso de SL_n, $\mathfrak{k}$ consiste de la totalidad de matrices antisimétricas y $\mathfrak{p}$ consiste del subespacio de matrices simétricas. Por tanto, la representación de $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ es equivalente a la representación de $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{p}$.

$$C(\mathfrak{g},M) = (\Lambda\mathfrak{g})^\star\otimes M = \Lambda\mathfrak{k}^\star\otimes\Lambda\mathfrak{p}^\star\otimes M$$

El cual admite la filtración

$$F^p = \oplus_{i\geq p}(M\otimes\Lambda^i\mathfrak{p}^\star\otimes\Lambda\mathfrak{k}^\star).$$

$$\Lambda\mathfrak{g}^\star\otimes M = F^0\supseteq F^1\supseteq F^2\cdots$$

Se tiene que

$-F^i$ es invariante por la acción adjunta de $\mathfrak{k}$.

-El operador de coborde preserva la filtración.

-El operador de coborde "cae" en

$$F^p/F^{p+1} = M\otimes\Lambda^p\mathfrak{p}^\star\otimes\Lambda\mathfrak{k}^\star = C(\mathfrak{k},M\otimes\Lambda\mathfrak{p}^\star)$$

al operador de coborde de la $\mathfrak{k}-$comología de $M\otimes\Lambda^p\mathfrak{p}^\star$. Por consiguiente, el término primero de la sucesión espectral es el indicado.

Como M es suma directa de representaciones irreducibles de dimensión finita de $\mathfrak{k}$ y cada una de ellas ocurre con multiplicidad finita, aplicando proposición 4 y el hecho que que comología conmuta con suma directas, el término E_1 resulta

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathfrak{k},M\otimes\Lambda^p\mathfrak{p}^\star) = Hom_K(\mathbb{C},M\otimes\Lambda^p\mathfrak{p}^\star)\otimes\Lambda^q(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}.$$

Para proceder recordamos un hecho que permite "calcular" comología relativa

Proposición 5. [1] [5] *Prop. 9.4.3.Para representaciones unitarias e irreducibles V, representaciones de dimensión finita E y todo i es válida la igualdad*

$$H^i(\mathfrak{g}, K, V \otimes E) = Hom_K(\Lambda^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), V \otimes E).$$

El operador de borde se convierte en el operador nulo!

El siguiente lema permite deducir la anulación de comología relativa a partir de anulación de comología de $\mathfrak{g}$.

Lema 2. *Schmid* [3]. *Si $H^i(\mathfrak{g}, V \otimes E) = 0$, para $i < R$, entonces $H^i(\mathfrak{g}, K, V \otimes E) = 0$, para $i < R$ y $H^R(\mathfrak{g}, K, V \otimes E) = H^R(\mathfrak{g}, V \otimes E)$.*

En efecto, el primer término de la sucesión espectral es

$$E_1^{p,q} = Hom_K(\Lambda^p \mathfrak{p}, V \otimes E) \otimes \Lambda^q(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}.$$

El operador de borde es de tipo $(1, 0)$.

En cuensecuencia, el segunto término de la sucesión espectral es

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{g}, K, M) \otimes \Lambda^q(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$$

el operador de borde es de tipo $(2, 1)$. (No aplicamos proposición 5 puesto que en otros cálculos V no es necesariamente unitaria. Denotemos por S el menor entero tal que $H^S(\mathfrak{g}, K, V \otimes E) \neq 0$. Por tanto,

$$E_2^{p,q} = 0, \ \textit{para}\ p < S$$

$$E_2^{p,q} = H^S(\mathfrak{g}, K, V \otimes E).$$

Ya que $H^0(\mathfrak{k}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Como los operadores de borde tienen bigrado $(r, 1-r)$ se concluye

$$H^i(\mathfrak{g}, V \otimes E) = \oplus_{p+q=i} E_\infty^{p,q} = H^i(\mathfrak{g}, K, M) \oplus \cdots = 0, \ \textit{para}\ i < S$$

$$H^S(\mathfrak{g}, V \otimes E) = H^S(\mathfrak{g}, K, V \otimes E).$$

En lo que sigue, mostraremos como deducir anulación de $\mathfrak{g}-$comología a partir de la anulación de la $\mathfrak{n}-$comología. Un modo es por la siguiente sucesión de lemas. Como siempre V es una representación unitaria, E una representación de dimensión finita de $G(\mathbb{R})$. El hecho de que

$$H^0(\mathfrak{g}, V \otimes E) = (V \otimes E)^{\mathfrak{g}} = Hom_{\mathfrak{g}}(\mathbb{C}, V \otimes E) = Hom_{\mathfrak{g}}(E^\star, V) = Ext^0_{\mathfrak{g}}(E^\star, V)$$

junto a que el functor $V \to V \otimes E$ es un functor exacto que lleva injectivos en injectivos, puesto que

$$Hom_{\mathfrak{g}}(L, E \otimes V) = Hom_{\mathfrak{g}}(L \otimes E^\star, V)$$

permite mostrar

Lema 3. [3]

$$H^i(\mathfrak{g}, V \otimes E) = Ext^i_{\mathfrak{g}}(E^\star, V).$$

Para continuar, fijamos una subalgebra parabólica minimal $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ del algebra de Lie de $G(\mathbb{R})$, una subalgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ que contiene a $\mathfrak{a}$ y denotamos por $\mathfrak{r}$ el radical de una subalgebra de Borel que contiene a $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Para el caso de $G(\mathbb{R}) = SL_N(\mathbb{R})$ se tiene que $\mathfrak{n} = \mathfrak{r}$ igual al álgebra de matrices nilpotentes triangulares superiores y $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}$ igual al álgebra de matrices diagonales de traza nula. Para el caso $G = SO(p, q)$ las álgebras $\mathfrak{n}$ y $\mathfrak{r}$ son distintas cuando p, q no son $(n, n)\, o\, (n, n + 1)$.
Como $\mathfrak{h}$ es un álgebra abelina, y $[\mathfrak{h} + \mathfrak{r}, \mathfrak{h} + \mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{r}$ cada $\lambda \in \mathfrak{h}^\star$ origina una representación unidimensional $\mathbb{C}_\lambda$ de $\mathfrak{h}+\mathfrak{r}$ declarando que toma el valor cero en $\mathfrak{r}$ y coincide con λ en $\mathfrak{h}$. Los $U(\mathfrak{g})-$módulos inducidos $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h}+\mathfrak{r})} \mathbb{C}_\lambda$ se los denomina módulos de Verma.

El hecho que toda representación de dimensión finita admite una resolución por módulos de Verma, resolución de Bernstein-Gelfand-Gelfand, permitira demostrar

Lema 4. [3] *Anulación de comología a partir de anulación de comología de módulos de Vermas. Si existe S tal que*

$$Ext^i_{\mathfrak{g}}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h}+\mathfrak{r})} \mathbb{C}_\lambda, V) = 0, \text{ para } i < S, \text{ y todo } \lambda.$$

Entonces, $Ext^i_{\mathfrak{g}}(E^\star, V) = 0$ para $i < S$.

Como la sucesión expectral $E_1^{p,q} = Ext^q_{\mathfrak{h}}(\mathbb{C}_\mu, H^p(\mathfrak{r}, V))$ converge a $H^{p+q}(\mathfrak{b}, \mathbb{C}^\star_\mu \otimes V) = Ext^{p+q}_{\mathfrak{g}}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h}+\mathfrak{r})} \mathbb{C}_\mu, V)$ se demuestra

Lema 5. [3] *Si $H^i(\mathfrak{r}, V) = 0$ para $i < S$, entonces*

$$Ext^i_{\mathfrak{g}}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h}+\mathfrak{r})} \mathbb{C}_\mu, V) = 0 \text{ para } i < S.$$

Por último, puesto que $\mathfrak{r} = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{m} + \mathfrak{n}, [\mathfrak{r} \cap \mathfrak{m}, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{n}$ la sucesión espectral de Hoschild-Serre cuyo

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}, H^q(\mathfrak{n}, V)),$$

permite mostrar

Lema 6. *Si $H^i(\mathfrak{n}, V) = 0$ para $i < S$, entonces $H^i(\mathfrak{r}, V) = 0$ para $i < S$.*

4. $\mathfrak{n}-$comologia de representaciones unitarias

Sea $G(\mathbb{R})$ el conjunto de puntos reales de un grupo algebraico semisimple definido sobre $\mathbb{R}$. El rango real de $G(\mathbb{R})$ es por definición el mayor número d tal que $d-$copias del grupo multiplicativo de los números reales positivos está contenido en $G(\mathbb{R})$. Por ejemplo, para $SL_{N+1}(\mathbb{R})$ el sugrupo de matrices diagonales cuyos coeficientes son todos no negativos es isomorfo a N copias de $\mathbb{R}_{>0}$. De esto, rango real de $SL_N(\mathbb{R})$ es mayor o igual a N. Se demuestra que es precisamente N. Para el grupo $SO(p, q), p \geq q$, el rango real es q. Fijemos ahora una subálgebra parabólica minimal del álgebra de Lie de $G(\mathbb{R})$ y denotemos por $\mathfrak{n}$ el radical unipotente de dicha subalgebra. Para el caso de SL_{N+1} un ejemplo de subalgebra parabólica minimal es la subalgebra de matrices triangulares superiores y la subalgebra $\mathfrak{n}$ es la subalgebra de matrices nilpotentes y triangulares superiores.

Teorema 9. *Borel-Wallach, Schmid, Zuckerman,* [3] [5]. *Supongamos que $G(\mathbb{R})$ es conexo. Entonces, para cada representación unitaria, irreducible V distinta de la trivial y para cada representación de dimensión finita F de $G(\mathbb{R})$ se tiene que*

$$H^i(\mathfrak{n}, V \otimes F) = 0, \ \ para\ i < rango\, real\, de\, G(\mathbb{R})$$

Dos demostraciones que se conocen de este teorema recurren a métodos analíticos. La prueba que se encuentra en [5] es "algebraica". En [5] pág 394 se tabula el mayor $c(G)$ de modo que

$$H^i(\mathfrak{n}, V \otimes F) = 0, \ \ \forall\, i < \ c(G(\mathbb{R}))$$

Por ejemplo, para $SL_{N+1}(\mathbb{R}), c = N, SO(p,q), p \leq q, c = p, SP(p,q), q \geq p, c = 2p$. En este último ejemplo c es mayor que el rango real p. Un problema abierto es determinar los grupos de comología restantes. Actualmente, se trabaja el problema del cálculo de H^i , entre las herramientas juega un rol importante la teoría de formas automorfas en grupos de Lie, [4] es una referencia actualizada sobre el estado del problema. Para los grupos $SO(p,q), p, q\, pares$, se sabe de no anulación de la comología en índices distintos a c [1], [3]. Una componente algebraica sin resolver es la siguiente: sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de $G(\mathbb{R})$ y denotemos por $\mathfrak{k}$ el álgebra de Lie de de un subgrupo maximal compacto K. Por tanto, K se representa linealmente en el espacio vectorial cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ y en las potencias exteriores $\Lambda^r(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$. El problema consiste en determinar el peso máximo de cada representación irreducible de K en $\Lambda^r(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ y su multiplicidad. en particular, no se conoce la solución para $G = SL_N(\mathbb{R})$.

References

[1] Borel, A, and Wallach, N., Continuos cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1980, number 94.

[2] Raghunathan, S., Discrete Subgroups of Lie groups, Springer Verlag, 1974.

[3] Schmid, W., Vanishing theorems for Lie algebra Cohomology and the Cohomology of discrete subgroups of Semisimple Lie groups, Advances in Math, 1981, 78-113.

[4] Speh, B., Cohomology of discrete groups and representation theory. Notas de un curso dictado en Peking en Julio de 2006 http://www.math.cornell.edu/ speh

[5] Wallach, N., Real reductive groups I, Academic Press.

[6] Zimmer, R., Ergodic theory, group representations, and rigidity, Bull. Amer. Math. Soc. 1982, 383-416.

FAMAF-CIEM, Universidad Nacional de Córdoba, 5000 Córdoba, Argentine, e-mail: vargas@famaf.unc.edu.ar