

**XVI Encuentro Rioplatense de Álgebra y
Geometría Algebraica**

**Desingularización de curvas y superficies: una
breve introducción
(segunda versión)**

Ivan Pan

Índice general

Introducción	5
Capítulo 1. Generalidades	7
1. Curvas y superficies complejas	7
2. Explosión de un punto	10
Capítulo 2. Singularidades de curvas	13
1. Desingularización de curvas	13
2. Singularidades simples de curvas	16
3. Diagramas de Dynkin asociados	19
Capítulo 3. Singularidades de superficies	21
1. Desingularización de superficies	22
Bibliografía	27

Introducción

La teoría de desingularización de variedades comenzó, creo yo, en el seno de la llamada *Escuela Italiana* de géometras. Más precisamente, con el advenimiento de las transformaciones de Cremona, introducidas por Luigi Cremona, allá por el 1860; estas transformaciones son aplicaciones birracionales del espacio proyectivo y, entre otras cosas, fueron los prototipos para el concepto de explosión. Gracias a un famoso teorema de M. Noether sabemos hoy que una transformación birracional del plano proyectivo es una composición de transformaciones cuadráticas; la demostración de Noether tenía un error señalado por B. Segre y la primera demostración de este magnífico teorema, considerada correcta, es debida a Castelnuovo, en 1912. Una transformación cuadrática (del plano proyectivo) puede escribirse localmente como una aplicación de \mathbb{C}^2 en \mathbb{C}^2 de la forma $(x, y) \mapsto (xy, y)$, lo que explica, como veremos en el capítulo 2, la utilidad de tales transformaciones para desingularizar curvas (por lo menos en el caso local). Las transformaciones birracionales del espacio proyectivo también fueron utilizadas por Segre, Cayley, Castelnuovo, Severi y muchos otros para simplificar singularidades de superficies y variedades de dimensión superior, y puede decirse que la desingularización de superficies complejas ya era conocida por la escuela italiana. Sin embargo, la primera prueba rigurosa de este hecho es debida a Walker en 1935.

Fue con Zariski y su escuela que el problema de la desingularización de variedades fue formulado de manera correcta y general en el contexto de la geometría algebraica, y fue precisamente Zariski que dio la primera demostración puramente algebraica de la (existencia de) desingularización de superficies sobre un cuerpo de característica 0, en 1939. En 1944, nuevamente Zariski, demostró la desingularización de superficies inmersas y de variedades de dimensión 3, también para característica 0.

Algunos años más tarde, en 1956, Abhyankar demostró la desingularización para superficies en característica $p > 0$ y luego, en 1966, la de variedades de dimensión 3 para característica $p > 5$. Mientras tanto, en 1964 Hironaka demostró la desingularización de variedades y la desingularización de variedades inmersas, en toda dimensión, en el caso de característica 0.

Después de Hironaka, muchos matemáticos han simplificado la demostración del caso general, en característica 0, como también dado (otras) demostraciones, en general más directas, para casos o contextos específicos, cuyo avance está estrechamente vinculado con aquel de la teoría general de singularidades. Otros nombres de destaque en el área de desingularización de variedades algebraicas, son Artin, Brieskorn, Lipman, Gonzalez-Sprinberg, Spivakovsky, Lejeune-Jalabert, Aroca, Ried, Villamayor, etc. Para una introducción elemental a la demostración de Hironaka el lector puede consultar [Hau] y [BEV]. Para tener una idea del tipo de problemas que interesa a los especialistas en desingularizaciones puede consultar por ejemplo: [Bri], [GS], [Sp], [Lip], [Ri] y nuevamente [BEV]

Como lo sugiere el título, estas notas tienen la intención de dar una breve introducción a la teoría de desingularización de curvas y de superficies. Para ser más honesto, me gustaría hacer una introducción extremadamente sucinta a la teoría general de desingularización de variedades algebraicas, resumiendo y exhibiendo algunas de las ideas centrales, pero focalizando la técnica en los dos casos de dimensión menor: el de las curvas y el de las superficies. Desgraciadamente

mi conocimiento de la teoría es muy reducido, razón por la cuál, preferí centrar mis esfuerzos en explicar parte del material que se encuentra en los manuales, en vez de aventurarme a escribir algo más original y adaptado a mi gusto, lo que requiere de un conocimiento mayor del que tengo sobre el asunto. De lo poco que conozco, la exposición que más me entusiasmó es la que se encuentra en el libro de Barth, Peter y Van de Ven ([BPV]), donde se da una demostración de la desingularización de curvas que sigue esencialmente la idea de Hironaka, en el caso de curvas en superficies, como en [Mu, Chap. 8, §8], pero presentándola de forma menos técnica. Para el caso de superficies se encuentra allí una demostración diferente a la de Hironaka, que funciona apenas para el caso de dimensión dos, pero que es más directa y elemental; además, ésta demostración utiliza la desingularización de curvas inmersas en superficies, lo que la hace, en mi opinión, más interesante en el contexto del minicurso.

Por otro lado, la desingularización que introduciremos, al igual que en la demostración de Hironaka, utiliza, como venía implícitamente sugerido por los antiguos geómetras de la escuela italiana, el concepto de explosión. La idea central, intuitivamente, es la de que al explotar una variedad en una parte que es singular, la singularidad “mejora” en algún sentido, que esperamos poder esclarecer a lo largo del curso, por lo menos en el caso de curvas. Existen maneras más intrínsecas de mejorar una singularidad. En el caso de curvas, la *normalización* (vea el capítulo 3 para una definición en el caso de superficies) hace desaparecer completamente la singularidad y es una herramienta que liquida el problema de forma rápida, y no demasiado complicada, pero tiene la desventaja que perdemos toda la intuición geométrica: el lector puede consultar [Har, Chap. I, §6] y [Sha, Chap. II, §5.2, §5.3] para un abordaje en este sentido; para otras demostraciones, en el caso de curvas planas, puede consultarse [Fu, Chap. 7]. Ya en el caso de superficies la normalización no es suficiente para terminar con las singularidades; de hecho la demostración que trabajaremos, mezcla explosiones con normalizaciones. La otra gran herramienta para mejorar las singularidades de variedades algebraicas es la llamada *transformada de Nash*, de la cual no hablaremos; el lector interesado podrá consultar por ejemplo [GS1], [LJ], [Sp].

El objetivo principal de las notas, es el de acompañar el minicurso homónimo que será ofrecido en el Encuentro Rioplatense de Álgebra y Geometría. Debido al tiempo reducido del que disponemos para introducirnos en un área bastante técnica como ésta, optaremos por privilegiar las ideas y dejar un poco de lado los tecnicismos y, sobre todo, los contextos muy generales. De esta forma, vamos a considerar la desingularización de curvas que están inmersas en superficies lisas y vamos a tratar, con algunas omisiones importantes, la desingularización de superficies. De hecho vamos a trabajar esencialmente en el caso local. En cierto sentido, haremos esto *à l'ancienne*; esto es, vamos a mezclar técnicas diferenciales con técnicas algebraicas, sin preocuparnos demasiado en justificar la equivalencia de los dos enfoques. La justificación rigurosa de tal práctica acabaría, en muchos casos, dejándonos con el “tintero lleno” y el público aburrido. Lo que haremos, es trabajar como en geometría diferencial básica, pero donde la diferenciabilidad es analítica. Consideraremos series de potencias con varias variables como si éstas se comportaran igual que en el caso de una variable compleja (de hecho es más o menos así); ésto es lo que nos permitirá tratar los objetos diferenciales como si fueran algebraicos.

En el capítulo primero introducimos las nociones y prerequisites básicos, así como el contexto en el cual trabajaremos: definición de superficie y de curva en superficie. El concepto de explosión de una superficie en un punto.

En el capítulo 2 demostraremos el teorema de desingularización de curvas, y, si el tiempo no fue consumido de forma inesperada, daremos la clasificación de curvas simples. En el último capítulo introducimos el material necesario y desarrollamos las ideas, a nuestro criterio, principales, para demostrar el teorema de desingularización de superficies; por falta de tiempo omitimos uno de los resultados cruciales, que resulta ser el más técnico.

CAPÍTULO 1

Generalidades

1. Curvas y superficies complejas

Una *superficie algebraica afín compleja* X de \mathbb{C}^3 es el conjunto de ceros de un polinomio no constante $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ que supondremos reducido, o sea, que $f = f_1 \cdots f_\ell$ con $f_1, \dots, f_\ell \in \mathbb{C}[x, y, z]$ polinomios irreducibles, dos a dos no asociados; por simplicidad diremos apenas que X es una superficie afín. Tenemos entonces

$$X = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 / f(a, b, c) = 0\},$$

que es no vacío, gracias al teorema fundamental del álgebra (concuerta ?).

En \mathbb{C}^3 existen por lo menos dos topologías interesantes. Estas son, la topología usual, o trascendente, y la topología de Zariski (analítica o algebraica). Debido al hecho de tratarse éste de un curso con duración muy reducida, utilizaremos, por lo menos explícitamente, la topología usual, conocida de todos. No obstante, la topología más adecuada cuando de geometría algebraica o analítica se trata, es sin lugar a dudas la de Zariski, que de cierta forma será reconocida por el lector más informado a este respecto, como siendo usada en ciertos argumentos, implícitamente. Más específicamente, precisaremos del teorema de ceros de Hilbert, la *Nullstellensatz*, cuya interpretación geométrica está estrechamente relacionada con la topología de Zariski. Consideremos la siguiente versión simplificada, que daremos sin demostración:

TEOREMA 1.1. Sean $g, h \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ polinomios donde g es no constante e irreducible; denotemos $Y = \{p \in \mathbb{C}^n / g(p) = 0\}$. Si $h(p) = 0$ para todo $p \in Y$, entonces g divide h .

Una consecuencia inmediata de este teorema es que dos polinomios reducidos cuyos conjuntos de ceros coinciden son forzosamente asociados.

Volviendo a nuestra situación con $X = \{f(x, y, z) = 0\}$, observemos que el conjunto cerrado

$$\text{Sing}(X) := \{p \in X / f_x(p) = f_y(p) = f_z(p) = 0\}$$

no contiene a X : en efecto, si f_x se anula sobre X , por la Nullstellensatz todo factor irreducible de f divide f_x , y entonces f divide f_x , lo que implica $f_x = 0$, pues un polinomio no nulo no puede dividir otro de grado menor. Como $f \notin \mathbb{C}$, alguna de sus derivadas parciales debe ser no nula, de donde sigue la afirmación.

Los puntos de $\text{Sing}(X)$ son los puntos *singulares* de X y aquellos de $X \setminus \text{Sing}(X)$ son los puntos *no singulares*, *regulares* o *lisos* de X ; por lo dicho antes, $\text{Sing}(X)$ depende de X y no de la ecuación considerada. Entonces $X \setminus \text{Sing}(X) \neq \emptyset$.

Supongamos que $\deg f = d \geq 1$. Sea $p \in X \setminus \text{Sing}(X)$. A menos de efectuar un cambio de variables lineal de \mathbb{C}^3 podemos suponer que el polinomio f contiene el monomio z^d , o sea que

$$f(x, y, z) = z^d + a_1(x, y)z^{d-1} + \cdots + a_d(x, y), \quad a_i \in \mathbb{C}[x, y];$$

más aún, a menos de efectuar, si necesario, un nuevo cambio lineal de variables que preserve el monomio z^d podemos suponer que $f_z(p) \neq 0$.

EJEMPLO 1.2. Muestre las afirmaciones arriba (sugerencia: vea que puede suponer $p = (1, 1, 0)$ y luego considere un cambio de variables de la forma $x' = x - \alpha z, y' = y - \beta z$, con α, β genéricos).

La proyección canónica definida por $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ induce una aplicación sobreyectiva $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^2$. Más todavía, el conjunto de los puntos $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tales que existe $c \in \mathbb{C}$ para el cual $f(a, b, c) = f_z(a, b, c) = 0$, define un cerrado Δ de \mathbb{C}^2 ; la proyección π define una aplicación $X \setminus \pi^{-1}(\Delta) \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \Delta$ que es un difeomorfismo local en todo punto de $X \setminus \pi^{-1}(\Delta)$, gracias al teorema de la función implícita. De esta forma, la restricción de las funciones coordenadas x e y a X definen un difeomorfismo de un entorno adecuado de todo punto (a, b, c) tal que $(a, b) \notin \Delta$ en un abierto de \mathbb{C}^2 ; en particular esto vale para el punto p : si U es un tal entorno de p diremos que x, y definen *parámetros locales* para p en U . Entonces en el entorno de todo punto no singular tenemos un abierto de X analíticamente difeomorfo a un abierto de \mathbb{C}^2 . El *plano tangente* a X en el punto no singular p es por definición el espacio vectorial complejo abstracto $\mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}y$, donde $x, y : U \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones definiendo parámetros locales en p .

Diremos que una superficie es no singular (o regular, o lisa) cuando no posee puntos singulares.

EJERCICIO 1.3. Considere las superficies de \mathbb{C}^3 definidas por las ecuaciones:

- a) $F: x^n + y^n + z^n = 1$
- b) $A_n: z^2 + x^2 + y^{n+1} = 0, n \geq 1.$
- c) $D_n: z^2 + y(x^2 + y^{n-1}) = 0, n \geq 4$
- d) $E_6: z^2 + x^3 + y^4 = 0$
- e) $E_7: z^2 + x(x^2 + y^3) = 0$
- f) $E_8: z^2 + x^3 + y^5 = 0$

Muestre que la única superficie lisa es la del caso (a) y encuentre los puntos singulares, en los casos restantes.

EJERCICIO 1.4. Muestre que el conjunto de puntos no singulares de una superficie X es un abierto denso de X .

Más generalmente una superficie algebraica afin compleja X , o apenas superficie afin, es una subvariedad algebraica de dimensión 2 de \mathbb{C}^n , para algún número natural $n \geq 3$ donde \mathbb{C} es el cuerpo de los números complejos. En otras palabras, existe una familia finita de polinomios $f_1, \dots, f_\ell \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ que generan un ideal radical (o sea, que coincide con su ideal radical) de altura $n - 2$ y tales que

$$X = \{p \in \mathbb{C}^n : f_1(p) = \dots = f_\ell(p) = 0\}. \quad (1)$$

Una definición *ad hoc* condiciente con el caso de \mathbb{C}^3 podría ser la de un conjunto X definido como en (1) con la siguiente propiedad: si $\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^2$ es una proyección genérica, o sea que $\pi = (h_1, h_2)$ con $h_1, h_2 \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ genéricos de grado uno, la restricción de π a X induce una aplicación sobreyectiva tal que sobre un abierto de \mathbb{C}^2 la preimagen de un punto es finita. Un punto $p \in X$ es *no singular* (o *regular*) si una de éstas proyecciones, digamos $\pi = (h_1, h_2)$, induce un difeomorfismo local en un entorno de p en X ; la restricción de h_1 y h_2 a un entorno como éste definen *parámetros locales* de X en p . Un punto donde toda proyección no induzca un difeomorfismo local será entonces un punto singular.

OBSERVACIÓN 1.5. La noción de punto no singular es invariante por difeomorfismos analíticos; en particular por cambios de variables lineales del espacio ambiente.

Vamos a definir ahora el concepto más general de *superficie* que utilizaremos todo a lo largo de estas notas.

DEFINICIÓN 1.6. Una superficie es un abierto de una superficie afin, o sea la intersección de un abierto de \mathbb{C}^n con una superficie $X \subset \mathbb{C}^n$.

NOTA 1.7. El teorema de la función implícita en su versión analítica permite demostrar que toda superficie algebraica es localmente analíticamente difeomorfa a \mathbb{C}^2 en el entorno de un punto no singular.

Como dijimos en la introducción, estamos interesados primeramente en el estudio local de los puntos singulares de curvas. Para mantenernos en un nivel relativamente elemental consideraremos apenas el caso de curvas inmersas dentro de una superficie lisa X . En este caso, podemos definir la noción de curva en X , de manera intuitiva, como siendo una unión finita de objetos localmente analíticamente difeomorfos a una curva de \mathbb{C}^2 ; recordamos que una curva (algebraica) de \mathbb{C}^2 es el conjunto de ceros de un polinomio no constante de $\mathbb{C}[x, y]$.

Sea $p \in C \subset X$ y u, v parámetros locales de X en p , definidos en un entorno U de p en X . Existe un abierto $U' \subseteq U$ de X que contiene p y una función analítica $f(u, v)$ reducida (o sea que es libre de cuadrados) en el anillo de las funciones analíticas en p (esto es, en un entorno de p) tal que $C \cap U' = \{f(u', v') = 0\}$, donde u', v' son las restricciones de u, v a U' . Sin pérdida de generalidad siempre podemos suponer $U = U'$ e que los parámetros locales están definidos de forma que $u(p) = v(p) = 0$ y que $f(0, 0) = f(u(p), v(p)) = 0$ si y solamente si $p \in C$ (basta disminuir, si necesario, el entorno U de p). Desarrollando en series de potencias de u, v , en el origen, tenemos

$$f = f_m(u, v) + f_{m+1}(u, v) + \dots$$

donde f_i es un polinomio homogéneo para todo $i = m, m+1, \dots$, con $f_m \neq 0$. El número entero $m = m_p(C) \geq 0$ es invariante por difeomorfismo analítico y llámase la *multiplicidad* del punto p en C ; decimos que p es un punto doble, triple, etc, y en general m -uplo, de acuerdo al caso en que m es 2, 3, etc, y arbitrario, respectivamente. Cada raíz de f_m define una recta del espacio tangente $T_p X := \mathbb{C}u \oplus \mathbb{C}v$ a X en p pasando por el origen. El conjunto de raíces de f_m , contadas con sus respectivas multiplicidades, será identificado con el conjunto de las respectivas rectas en $T_p X$: es el *cono tangente* de C en p ; si $m > 1$, decimos que el punto singular p es *ordinario* cuando el cono tangente tiene exactamente m puntos (distintos), o sea, si $f_m(u, v)$ no tiene raíces múltiples. Podemos escribir

$$f_m = \prod_{i=1}^{\ell} (b_i u - a_i v)^{m_i} = \prod_{i=1}^{\ell} f_{m_i},$$

donde las igualdades son a menos de multiplicación por constante y (a_i, b_i) es una raíz de f_m de multiplicidad m_i y $\sum_i m_i = m$. Cada raíz (a_i, b_i) define una *dirección tangente* T_i correspondiente a la ecuación de recta $b_i u - a_i v = 0$ definida en el plano tangente $\mathbb{C}u \oplus \mathbb{C}v$ de X en p .

Como el anillo de series de potencias convergentes (en cualquier número de variables) en un punto es un anillo de factorización, podemos encontrar series convergentes $g_i = f_{m_i} + \dots$ tales que $f = g_1 \cdots g_{\ell}$ (en un abierto eventualmente menor). La curva definida localmente por $g_i = 0$ es la reunión de *ramas* de C en p correspondiente a la dirección tangente T_i definida por la raíz (a_i, b_i) ; una *rama* de C en p es la curva definida por la anulación de un factor irreducible de alguna g_i .

EJERCICIO 1.8. Estudie la existencia de puntos singulares de las curvas de \mathbb{C}^2 de ecuaciones $f(x, y) = 0$ donde f es uno de los siguientes polinomios:

$$y + x(x+1)(x+2), x^2 + x^4 + y^4, xy + x^6 + y^6, x^3 + y^2 + x^4 + y^4, x^2 y + xy^2 + x^4 + y^4.$$

En cada caso, encuentre una factorización local como producto de series de potencias irreducibles en el origen.

Sean $C, D \subset X$ dos curvas en X y un punto $p \in X$. Supongamos que C y D no tengan ramas en común en p . Escojamos un entorno U de p en X , analíticamente difeomorfo a un abierto de \mathbb{C}^2 , de forma que

$$C \cap U = (f = 0),$$

donde f es libre de cuadrados; por simplicidad supondremos que D admite una parametrización local en p , esto es, que existe $\gamma : \mathbb{D} \rightarrow U$ analítica y no constante en el disco unitario (centro en el origen y radio 1), tal que $\gamma(\mathbb{D}) \subset D$ y $\gamma(0) = p$. La *multiplicidad de intersección* $i_p(C, D)$ de C y D en p , es por definición, el orden de anulación en 0 de $f(\gamma(t))$: esto corresponde, intuitivamente, al *orden de anulación* de la restricción de f a D . Puede definirse la multiplicidad de intersección $i_p(C, D)$ para curvas C y D arbitrarias, demostrarse que este número es invariante por difeomorfismos analíticos y también que $i_p(C, D) = i_p(D, C)$; además $i_p(C, D) = \infty$ si y sólo si C y D contienen una rama común en p (vea por ejemplo [Fu]). Cuando $C \cap D$ es finito, definimos

$$C \cdot D = \sum_{p \in C \cap D} i(C, D)_p :$$

es el *número de intersección* de C y D .

Como se ve fácilmente de nuestra definición, la multiplicidad de intersección es aditiva en el sentido que si $f = f_1 \cdots f_\ell$, donde C_i designa la curva definida por $f_i = 0$, entonces $i_p(C, D) = \sum_{i=1}^{\ell} i_p(C_i, D)$; en particular esto puede ser aplicado para las ramas de C en p . La misma observación extiéndese al número de intersección $C \cdot D$.

EJERCICIO 1.9. Calcule el número de intersección $C \cdot T$ de cada una de las curvas C del ejercicio precedente, donde T es una de las rectas tangentes en el origen.

2. Explosión de un punto

Sea X una superficie y $p \in X$ un punto no singular. Sea (u, v) un par de parámetros locales en p definidos en un entorno abierto $U \subset X$ de p .

La *explosión local* de X en el punto p es el subconjunto \tilde{U} de $U \times \mathbb{P}^1$ de ecuación $uz_1 = vz_0$; denotemos $\sigma : \tilde{U} \rightarrow U$ la restricción de la proyección canónica sobre el primer factor. Observemos que $E = E_p := \sigma^{-1}(p) = \{p\} \times \mathbb{P}^1$ es una recta proyectiva (vea el ejercicio 1.11). Por otro lado, σ induce un difeomorfismo analítico de $\tilde{U} - E \rightarrow U - \{p\}$: basta con observar que σ induce difeomorfismos analíticos de los abiertos $V_0 := \tilde{U} \cap \{z_0 \neq 0\}$ y $V_1 := \tilde{U} \cap \{z_1 \neq 0\}$ en $U - \{u \neq 0\}$ y $U - \{v \neq 0\}$, que en las *cartas locales* u, v se escriben, respectivamente:

$$(u, s) \mapsto (u, su) \quad (t, v) \mapsto (tv, v)$$

com $s = \frac{z_1}{z_0}$ e $t = s^{-1}$ y que $E \cap V_0 = (u = 0)$, $E \cap V_1 = (v = 0)$. El lector podrá constatar sin dificultad que \tilde{U} y \tilde{V} son superficies lisas. El conjunto E es la *fibra excepcional* de σ .

Es posible mostrar que la explosión como definida arriba no depende de la carta local escogida, a menos de difeomorfismos analíticos. De esta forma, tenemos una manera de compactificar $X - \{p\}$ donde sustituimos el punto p por una recta proyectiva, de forma que obtenemos una superficie analítica en el entorno de la fibra excepcional introducida. Esta compactificación es la explosión (global) de X en p (para más detalles, consulte por ejemplo [Sha]).

En nuestro caso, aunque hayamos tratado con rigor solamente el caso de la explosión local, consideraremos el caso general y hablaremos apenas de *explosión*. El lector podrá suponer, si necesario, que la superficie “a ser explotada” está definida en un entorno suficientemente pequeño del punto “a explotar” de forma que lo local y lo global coincidan, pues de hecho nuestro estudio será esencialmente local.

DEFINICIÓN 1.10. Sea X una superficie. Una modificación de X es la composición de una sucesión de explosiones $\sigma_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$ ($i = 1, \dots, k$), en puntos $p_i \in X_i$; notemos $E_i = \sigma_i^{-1}(p_i)$ las fibras excepcionales. Si $p_1 = p \in X = X_1$ y $p_{i+1} \in E_i$ para $i \geq 1$, diremos que la modificación de X es en p .

Si $\tau : Y \rightarrow X$ es una modificación de X en p y $C \subset X$ es una curva, la transformada total reducida de C es $\tau^{-1}(C)$ y la transformada estricta de C es la adherencia $\widetilde{\tau^{-1}(C)}$ en Y de $\tau^{-1}(C - \{p\})$; dejamos a cargo del lector la definición de transformada total reducida y estricta en el caso de una modificación arbitraria. Las fibras excepcionales de la modificación τ son las curvas (isomorfas a una recta proyectiva) en Y correspondientes a las transformadas estrictas de las fibras excepcionales de las explosiones que componen la modificación.

EJERCICIO 1.11. a) Considere la explosión (local) de X en p . Muestre que un punto $(p, (a : b)) \in E$ de la fibra excepcional corresponde a la dirección tangente de ecuación $bu - av = 0$ (sugerencia: observe que esta ecuación define una curva (local) en X pasando por p ; calcule la transformada estricta de esta curva).

b) Calcule las transformadas estricta y total reducida de las curvas C del ejercicio 1.8 con respecto a la explosión del origen (ref. ejercicio 1.9).

c) Si E es la fibra excepcional de la explosión de la parte (a), calcule $E \cdot \widetilde{C}$, donde \widetilde{C} es la transformada estricta de C .

CAPÍTULO 2

Singularidades de curvas

En todo este capítulo las superficies consideradas son lisas y, si necesario para la comprensión, estas pueden ser consideradas como abiertos de superficies afines de \mathbb{C}^3 , tan pequeños como sea necesario, de acuerdo a la definición 1.6.

1. Desingularización de curvas

Sea X una superficie lisa y $p \in X$. Supongamos que $C \subset X$ es una curva que contiene p como punto de multiplicidad $m \geq 1$. Sea $U \subset X$ un entorno de p donde tenemos definidos parámetros locales u, v tales que $u(p) = v(p) = 0$. Tenemos el desarrollo de Taylor

$$f(u, v) = \sum_{k \geq m} f_k(u, v).$$

El objetivo de este párrafo es demostrar que podemos construir una modificación de X en p de forma que la transformada estricta de C correspondiente no contenga ningún punto singular (teorema 2.3) y que la transformada total reducida sólo tenga puntos dobles ordinarios (corolario 2.6).

Consideremos la explosión $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ de X en p . En el abierto V_0 de $U \times \mathbb{P}^1$ definido por $z_0 \neq 0$, la explosión \tilde{X} tiene ecuación $v = (z_1/z_0)u$ y entonces la transformada total reducida de C es el conjunto de ceros de la función

$$\begin{aligned} \sigma^*(f) &:= f \circ \sigma = \sum_{\ell \geq m} f_\ell(u, zu) \\ &= u^m \left(\sum_{\ell \geq m} f_\ell(1, z) u^{\ell-m} \right) \end{aligned}$$

donde $z = z_1/z_0$; observe que $E \cap V_0$ está definido por la ecuación $u = 0$. Tenemos una expresión análoga en el abierto $z_1 \neq 0$. Concluimos que m es el máximo entero tal que u^m divide $f \circ \sigma$; a nivel de (los objetos geométricos) las curvas, escribiremos

$$\sigma^*C = \tilde{C} + mE,$$

donde $\tilde{C} \cap V_0$ tiene ecuación $\sum_{\ell \geq m} f_\ell(1, z) u^{\ell-m} = 0$; entonces \tilde{C} es la transformada estricta de C y $\tilde{C} \cup E$ la transformada total reducida¹. Por otro lado, el orden de anulación de $\sum_{\ell \geq m} f_\ell(1, z) u^{\ell-m} = 0$ en $u = 0$ es el número de raíces de $f_m(1, z)$ contadas con multiplicidad; análogamente para $f_m(z', 1)$ y $v = 0$, donde $z' = z_0/z_1$. Concluimos que el número de intersección $E \cdot \tilde{C}$ es exactamente m .

Finalmente, fijemos una raíz (a, b) del polinomio homogéneo $f_m(u, v)$; esta corresponde a una recta tangente T de ecuación $bu - av = 0$, que por su lado corresponde a un punto $e \in E$. Si C_T es la reunión de las ramas locales de C en p , con tangente T , entonces $m_p(C_T)$ es el orden

¹En la teoría de *divisores*, en general, se define la transformada total como siendo el divisor $\sigma^*C = \tilde{C} + mE$ y la transformada total reducida como $\tilde{C} + E$

de la raíz de $f_m(u, v)$ correspondiente a la recta T . Por otro lado, como la multiplicidad de intersección de dos curvas en un punto es mayor o igual que la multiplicidad de cada curva en el punto (de hecho es mayor o igual que el producto de ambas multiplicidades), concluimos que la multiplicidad de \widetilde{C}_T en e es entonces $\leq \widetilde{C} \cdot E = m_p(C_T)$.

De los razonamientos anteriores, deducimos los siguientes resultados:

LEMA 2.1. Sean $C \subset X$ una curva y $p \in X$ un punto singular de C ; denotemos $\{e_1, \dots, e_n\} = E \cap \widetilde{C}$. Entonces

$$m_p(C) \geq \sum_{i=1}^n m_{e_i}(\widetilde{C}).$$

COROLARIO 2.2. Sea $\tau : Y \rightarrow X$ una modificación de X en p . Si $C \subset X$ es una curva, \widetilde{C} su transformada estricta e $y \in \widetilde{C}$, entonces

$$m_y(\widetilde{C}) \leq m_{\tau(y)}(C).$$

El resultado principal de este capítulo es el siguiente:

TEOREMA 2.3. Sean X una superficie lisa y $C \subset X$ una curva. Existe una modificación $\tau : Y \rightarrow X$ tal que la transformada estricta $\widetilde{\tau^{-1}(C)}$ de C es no singular.

La idea de la demostración es la de observar que si $p \in C$ es un punto singular, luego de explotar este punto, las eventuales singularidades de la transformada estricta de C son “mas simples” que la singularidad en p . Como la multiplicidad es una medida de la complejidad de la singularidad, el corolario anterior nos muestra que la singularidad, en principio, no empeora después de la explosión, en términos de este invariante. Sin embargo, como muestra el ejemplo siguiente, la multiplicidad apenas, no alcanza para medir esta complejidad, desde que aceptemos que el teorema está correcto.

EJEMPLO 2.4. Sea $C = \{y^2 - x^5 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$; tiene un punto doble en el origen. Consideremos la explosión de \mathbb{C}^2 en el origen, que en cartas locales puede escribirse $\sigma : (s, t) \mapsto (s, st)$. La transformada estricta de C tiene ecuación $t^2 - s^3 = 0$, que posee aun un punto doble. No obstante, el lector podrá verificar sin mayores problemas que si explotamos este nuevo punto doble la transformada estricta será lisa.

Vamos entonces a definir otro invariante. Guardamos todas las notaciones introducidas antes del lema 2.1. Sean T_1, \dots, T_r las diferentes direcciones tangentes en un punto $p \in C \subset X$ de multiplicidad $m \geq 1$, lo que corresponde a las diferentes raíces de $f_m(u, v)$; denotemos $C_i = C_{T_i}$. Definimos el *contacto* de C en p como siendo el número entero positivo

$$c_p(C) = \sum_{i=1}^r i_p(T_i, C_i).$$

Es un invariante analítico del punto p ; si $p \notin C$ diremos que el contacto en p es nulo.

La multiplicidad y el contacto de C en p nos dan una nueva noción de medida de cuan singular la curva es en p . De hecho, tenemos el siguiente resultado:

LEMA 2.5. Sean X una superficie lisa y $C \subset X$ una curva con una única dirección tangente en un punto $p \in X$. Sea $\sigma : \widetilde{X} \rightarrow X$ la explosión de X en p ; denotemos $D = \widetilde{\sigma^{-1}(C)}$. Supongamos que existe $y \in D$ tal que $\sigma(y) = p$ de forma que $m_y(D) = m_p(C) > 1$. Si D posee una única dirección tangente en y entonces $c_p(C) > c_y(D)$.

DEMOSTRACIÓN. Sean u, v parámetros locales de X en p , definidos en un entorno de p . A menos de hacer un cambio de variables lineal, podemos suponer que la dirección tangente (única) a C en p está definida por $v = 0$ en el plano tangente $\mathbb{C}u \oplus \mathbb{C}v$ de X en p . Entonces C está definida en un entorno de p en X , por una ecuación de la forma $(f = 0)$ con

$$f = v^m + \sum_{i+j \geq m+1} a_{ij} u^i v^j, \quad a_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Por otro lado, podemos suponer que σ se escribe en cartas locales como $(u, z) \mapsto (u, uz)$, donde $z = z_1/z_0$ como más arriba. La transformada estricta de C tiene entonces una ecuación de la forma $(\tilde{f} = 0)$ con

$$z^m + \sum_{i+j \geq m+1} a_{ij} u^{i+j-m} z^j,$$

y el punto y tiene coordenadas $(0, 0)$. Si este punto es de multiplicidad m , entonces $a_{ij} = 0$ cuando $2j + i - m < m$.

Supongamos que la transformada estricta de C posea una única dirección tangente en y . Entonces $a_{ij} = 0$ cuando $2j + i - m = m$. Como la ecuación de C es reducida y $m > 1$, para algún subíndice i debemos tener $a_{i0} \neq 0$; denotamos ℓ el mínimo de los índices i tales que $a_{i0} \neq 0$. Por construcción ℓ es el orden de anulación de $f(u, 0)$ en $u = 0$, que coincide entonces con el contacto $c_p(C)$. Observemos que la recta $z = 0$ es tangente en el origen a \tilde{C} . El orden de anulación de $\tilde{f}(u, 0)$ en $u = 0$, que es exactamente $c_y(\tilde{C})$, vale $\ell - m$. La demostración está entonces completa. \square

Prueba del teorema 2.3. La afirmación es de índole local, razón por la cual, podemos suponer que C tiene una única singularidad y que X posee parámetros locales u, v definidos en todo X . A un punto singular $p \in X$ podemos asociar el vector de coordenadas enteras no negativas $d_p(C) = (m_p(C), c_p(C)) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ cuyas coordenadas son la multiplicidad y el contacto en p , respectivamente. Consideramos $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ordenado con el orden lexicográfico.

Para demostrar el teorema, es suficiente probar que existe una modificación $\tau : Y \rightarrow X$ de X en p , de forma que si $D = \tilde{C}$ es la transformada estricta de C con respecto a τ , entonces para todo punto $y \in D$ tal que $\tau(y) = p$ se tiene

$$d_y(D) < d_p(C).$$

Consideremos la explosión $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ de X en p . El lema 2.1 implica $m_y(D) \leq m_p(C)$ para todo $y \in \tilde{X}$ donde la igualdad sólo puede ocurrir en el caso en que existe una única dirección tangente de C en p . En este caso (de igualdad), de acuerdo al lema 2.5, tenemos dos posibilidades:

- a) $c_y(D) < c_p(C)$ para todo $y \in D$ y entonces $\tau = \sigma$ es la modificación buscada.
- b) $c_y(D) \geq c_p(C)$ para algún $y \in D$, entonces D posee más de una dirección tangente en y ; explotando \tilde{X} en y y aplicando el lema 2.1 la modificación τ procurada es la composición de las dos explosiones. \square

Como aplicación del teorema de desingularización 2.3 tenemos el siguiente corolario, cuya demostración es dejada como ejercicio para el lector interesado:

COROLARIO 2.6. *Existe una modificación $\tau : Y \rightarrow X$ de X tal que la transformada total reducida $\tau^{-1}(C)$ tiene solamente puntos dobles ordinarios como singularidades.*

DEFINICIÓN 2.7. *Sea X una superficie y $C \subset X$ una curva. Una desingularización (encajada) de C es una modificación $\tau : Y \rightarrow X$ de X tal que la transformada estricta $\widetilde{\tau^{-1}(C)}$ de C es lisa.*

Diremos que la desingularización τ es a cruzamientos normales cuando las únicas singularidades de la transformada total reducida $\tau^{-1}(C)$ de C sean puntos dobles ordinarias.

Observemos que $\tau^{-1}(C)$ siempre tiene singularidades, a menos que C sea lisa y $\tau : X \rightarrow X$ sea la aplicación identidad. También hablase de *resolución de singularidades* para referirse a una desingularización.

2. Singularidades simples de curvas

En este párrafo vamos a dar algunas informaciones en lo que respecta a la clasificación local de singularidades de curvas en superficies. En todo el párrafo $C \subset X$ es una curva en una superficie lisa X y $p \in C$. Como antes, supondremos que existen parámetros locales u, v de X en p definidos en toda la superficie X . Denotamos $m = m_p(C)$ y

$$C : f(u, v) = \sum_{j \geq m} f_j(u, v) = 0,$$

una ecuación (reducida) de C .

2.1. Caso $m = 1$. En este caso $f_1 = au + bv$ donde $a \neq 0$ o $b \neq 0$. Basta efectuar un cambio de variables lineal en u y v podemos suponer $a = 1, b = 0$. Entonces la aplicación $(x, y) = (f(u, v), v)$ define un difeomorfismo analítico local que transforma $f = 0$ en $x = 0$. Concluimos que C es analíticamente equivalente a \mathbb{C} en el entorno de p .

2.2. Caso $m = 2$. Tenemos

$$f_2 = au^2 + buv + cv^2.$$

Mediante un cambio lineal de variables podemos distinguir dos subcasos:

$$f_2 = u^2 + v^2 \quad \text{ó} \quad f_2 = u^2.$$

En el primero, tenemos

$$f = u^2g(u, v) + v^2h(u, v)$$

donde $g(0, 0) \neq 0$ y $h(0, 0) \neq 0$. El cambio de variables analítico (local)

$$x = u\sqrt{g(u, v)}, \quad y = v\sqrt{h(u, v)}$$

permite llevar f a la *forma normal*

$$f = x^2 + y^2$$

que llamaremos de *tipo A_1* .

En el segundo subcaso, consideramos el *número de Milnor*

$$\mu_p(C) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[u, v]]}{(f_u, f_v)},$$

donde $\mathbb{C}[[u, v]]$ es el anillo de series de potencias (formales o) convergentes; es un invariante analítico (ver también [Mi]), que es finito ya que f es reducida: en efecto, puede mostrarse que la dimensión que lo define es el número de intersección de $f_u = 0$ y $f_v = 0$ ([Fu, Chap. 3]).

Escribimos

$$f = u^2g(u, v) + u\varphi(v) + \psi(v) \tag{2}$$

con $g(0, 0) \neq 0$ y φ, ψ anulándose en 0 al orden $k \geq 2$ y $\ell \geq 3$ respectivamente; en particular $\varphi(v)/v\varphi_v(v)$ se extiende a una función analítica y no nula en 0. Tenemos la siguiente igualdad de ideales

$$(f_u, f_v) = (2ug + u^2g_u + \varphi, u^2g_v + u\varphi_v + \psi_v) \subset (u, \varphi_v, \psi_v).$$

Deducimos

$$\text{mín}\{k-1, \ell-1\} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[u, v]]}{(u, \varphi_v, \psi_v)} \leq \mu_p(C).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} u^2g + u\varphi + \psi &= (u\sqrt{g})^2 + u\varphi + \psi \\ &= (u')^2 - \frac{\varphi^2}{4g} + \psi, \end{aligned}$$

donde $u' = u\sqrt{g} + \varphi/2\sqrt{g}$.

Expandiendo $(1/4g) = \phi(v) + u'\varphi_1(v) + (u')^2h(u', v)$ y escribiendo

$$g' = 1 - \varphi^2h, \quad \varphi' = -\varphi^2\varphi_1, \quad \psi' = \psi - \varphi^2\phi,$$

con $g'(0, 0) \neq 0$, obtenemos una ecuación equivalente a f de la forma

$$(u')^2g'(u', v) + u'\varphi'(v) + \psi'(v) = 0,$$

pero ahora, donde el orden de φ' en el origen es mayor o igual que el doble del orden de φ en el origen. A menos de repetir este razonamiento un número finito de veces, gracias a la invariancia del número de Milnor, podemos suponer que $k \geq \ell$; sin pérdida de generalidad podemos entonces partir de la ecuación (2) con

$$u\varphi(v) + \psi(v) = v^\ell g''(u, v), \quad g''(0, 0) \neq 0.$$

Introducimos el cambio de variables

$$x = u\sqrt{g}, \quad y = v^\ell \sqrt{g''}.$$

Si $n = \mu_p(C)$, obtenemos la forma normal para C siguiente:

$$x^2 + y^{n+1}, \quad n \geq 2,$$

que llamaremos de tipo A_n .

2.3. Caso $m = 3$. Distinguimos tres subcasos:

a) f_3 tiene por lo menos dos raíces distintas. Una de estas raíces debe ser simple; tenemos entonces por lo menos dos ramas. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que v divide f_3 pero v^2 no lo divide. Entonces la rama tangente a $v = 0$ es simple (lisa) de la forma $v = g(u)$. Via un cambio de variables analítico

$$u' = u, \quad v' = g(u) - v,$$

podemos finalmente suponer que

$$f = h(u, v)v,$$

donde $h = 0$ define (localmente) una curva con una singularidad de multiplicidad 2 en p tal que v no divide h_2 . Via un cambio de variables lineal que deje invariante $v = 0$ podemos suponer

$$h_2 = u^2 + v^2 \quad \text{ó} \quad h_2 = u^2.$$

Utilizando lo hecho en el párrafo 2.2 obtenemos la forma normal

$$f = y(x^2 + y^{n-2}), \quad n \geq 4,$$

que llamaremos el tipo D_n .

b) Si f_3 tiene una raíz triple, podemos suponer

$$f = u^3g(u, v) + u^2v^2\varphi_1(v) + uv^3\varphi_2(v) + v^4\varphi_3(v),$$

con $g(0, 0) \neq 0$.

Para una curva con la ecuación $f(u, v) = 0$, tenemos el siguiente lema:

LEMA 2.8. *La transformada total reducida de C , con respecto a la explosión en el origen, tiene un punto de multiplicidad > 3 si y sólo si $\varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \frac{d\varphi_3}{dv}(0) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Considerando la explosión en cartas locales definida por $(u, v) \mapsto (uv, v)$ obtenemos

$$\sigma^*(f) = v^3(u^3\tilde{g}(u, v) + u^2v\varphi_1(v) + uv\varphi_2(v) + v\varphi_3(v)),$$

donde $\tilde{g}(u, v) = g(uv, v)$ (observe que $\tilde{g}(0, 0) \neq 0$). Dividiendo por v^3 obtenemos la ecuación de la transformada estricta:

$$u^3\tilde{g}(u, v) + u^2v\varphi_1(v) + uv\varphi_2(v) + v\varphi_3(v) = 0.$$

Que $(0, 0)$ es un punto de multiplicidad > 3 equivale exactamente a imponer $\varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \frac{d\varphi_3}{dv}(0) = 0$. \square

DEFINICIÓN 2.9. *Sea $C \subset X$ una curva y $p \in C$ un punto singular de C . Decimos que p es una singularidad simple si $m_p(C) \in \{2, 3\}$ y la transformada total reducida de C via cualquier modificación de X en p tiene apenas puntos dobles o triples como singularidades.*

Terminamos esta descripción exhibiendo, sin demostración, las formas normales para los tres casos en que p es un punto singular (triple) siguientes (para mayores detalles el lector puede consultar [BPV, Chap. II, §8] de donde viene nuestra exposición):

b1) Si $\varphi_3(0) \neq 0$ entonces

$$f = x^3 + y^4,$$

que llamamos el tipo E_6 .

b2) Si $\varphi_3(0) = 0$ y $\varphi_2(0) \neq 0$, se obtiene

$$f = x(x^2 + y^3),$$

que llamamos el tipo E_7 .

b3) Si $\varphi_3(0) = \varphi_2(0) = 0$ y $\frac{d\varphi_3}{dv}(0) \neq 0$, tenemos finalmente

$$f = x^3 + y^5$$

que llamamos el tipo E_8 .

OBSERVACIÓN 2.10. Si $m_p(C) = 2$ la singularidad es evidentemente simple. De la misma forma, si $m_p(C) = 3$ y el cono tangente no está constituido por una única raíz, que será entonces triple, la singularidad también es simple.

De esta forma podemos obtener la clasificación completa de singularidades simples de curvas. Es el contenido del siguiente teorema:

TEOREMA 2.11. *Las singularidades simples de curvas son, a menos de cambio de variables analíticos, exactamente los puntos dobles con formas normales*

$$A_n : x^2 + y^{n+1}, \quad n \geq 1$$

y los puntos triples con formas normales

$$D_n : y(x^2 + y^{n-1}) = 0, \quad n \geq 4$$

$$E_6 : x^3 + y^4 = 0$$

$$E_7 : x(x^2 + y^3) = 0$$

$$E_8 : x^3 + y^5 = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Como vimos mas arriba toda singularidad simple tiene una forma normal como en el enunciado del teorema. La prueba de que toda forma normal corresponde a una singularidad simple es una consecuencia del ejercicio abajo. \square

EJERCICIO 2.12. Sea $C \subset \mathbb{C}^2$ una curva cuya ecuación tiene una forma normal como las del enunciado del teorema 2.11. Sea \tilde{C} la transformada estricta de C con respecto a la explosión de \mathbb{C}^2 en el origen. Pruebe que la singularidad p de C y las de su transformada estricta $D = \tilde{C}$ satisfacen la siguiente tabla:

C	A_2	$A_n, n \geq 3$	D_4	D_5	$D_n, n \geq 6$	E_6	E_7	E_8
D	A_3	D_{n+1}	$3A_1$	A_1, A_3	A_1, D_{n-2}	A_5	D_6	E_7

Concluya la demostración del teorema 2.11.

3. Diagramas de Dynkin asociados

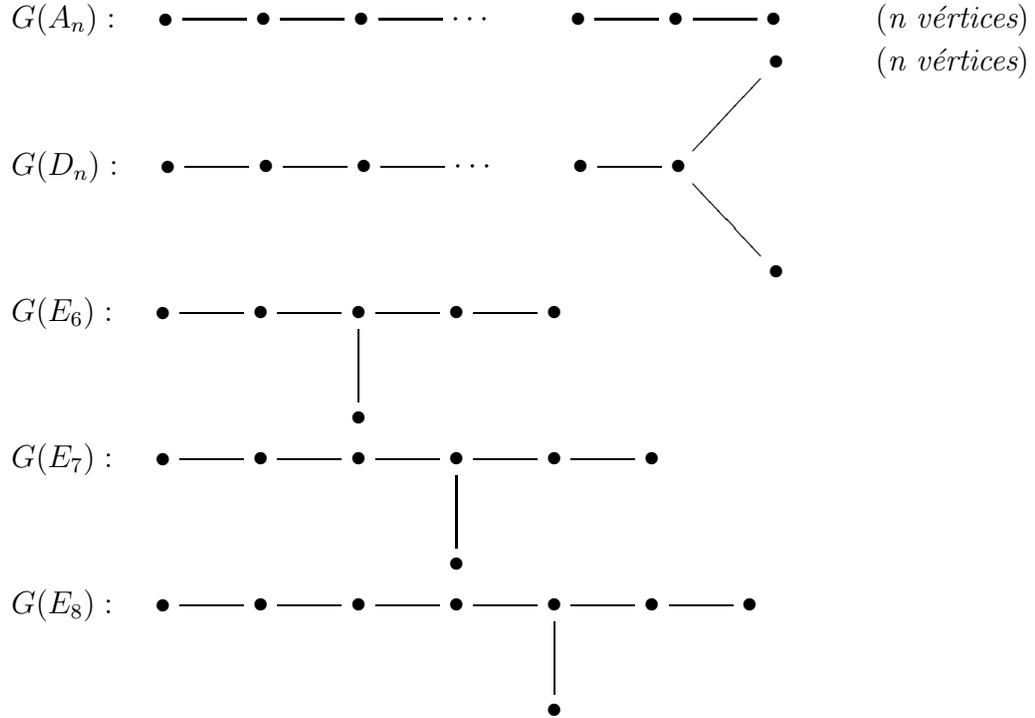
Sea (X, C) un par donde X es una superficie y $C \subset X$ una curva. La *desingularización canónica* de (X, C) es una desingularización $\tau : Y \rightarrow X$ de C que es composición de un número mínimo de explosiones de puntos, con la siguiente propiedad adicional: si E es una fibra excepcional de τ y $D = \widetilde{\tau^{-1}(C)}$, entonces $i_y(E, D) \leq 1$ para todo $y \in Y$; esta condición corresponde a decir que E y D no son tangentes.

Explícitamente: para obtener la modificación del teorema 2.3, como sigue de la demostración del mismo, efectuamos una composición de explosiones de puntos, donde cada explosión es efectuada en un punto singular de C (cuando el punto es p) o de alguna de sus transformadas estrictas, obteniendo de esta forma una transformada estricta D lisa; luego, para obtener la desingularización canónica componemos, eventualmente, con la explosión en el punto de tangencia de D con la fibra excepcional de la última explosión, y repetimos este procedimiento hasta el primer momento donde la correspondiente transformada estricta de D deja de ser tangente a la fibra excepcional de la última explosión efectuada. Es posible demostrar que esta desingularización es minimal en el sentido siguiente: si $\tau' : Y' \rightarrow X$ es otra modificación con la hipótesis adicional de no tangencia, entonces existe una modificación $\phi : Y' \rightarrow Y$ tal que $\tau \circ \phi = \tau'$; este resultado es consecuencia del hecho que la explosión de un punto es única en un sentido análogo (vea por ejemplo [Sha, Chap.II, §4, Lemma]).

Supongamos que C posea una única singularidad $p \in X$, con desingularización canónica $\tau : Y \rightarrow X$; diremos que (X, C, p) es una *singularidad de curva*, que llamaremos *simple* si el punto singular p es simple en el sentido de la definición 2.9. Escribimos $\tau^{-1}(p) = E_1 \cup \dots \cup E_n$ donde los E_i son las fibras excepcionales de τ . El *grafo dual* $G_p(C)$ de la singularidad es por definición el grafo con n vértices $\{e_1, \dots, e_n\}$, e_i en correspondencia con E_i , donde dos vértices e_j, e_k están conectados por una arista si y solamente si $E_j \cap E_k \neq \emptyset$.

En el caso de las singularidades simples (2.11) los grafos duales correspondientes son justamente los *diagramas de Dynkin* que, con mismo nombre que el correspondiente tipo de la singularidad, aparecen en la clasificación de álgebras de Lie simples (vea [FuHa, Part IV]). Esto explica la nomenclatura utilizada. En efecto, tenemos:

TEOREMA 2.13. *Sea (X, C, p) una singularidad simple de curva; si la singularidad es de tipo \mathcal{T} , denotamos $G(\mathcal{T})$ su grafo dual. Tenemos los siguientes grafos duales:*



DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue de un cálculo explícito (local), de acuerdo al algoritmo descrito arriba, para obtener la desingularización canónica. A título de ejemplo, hacemos este cálculo para el tipo A_n , dejando los restantes como ejercicio para el lector.

Consideramos la curva $C \subset \mathbb{C}^2$ de ecuación $y^2 + x^{n+1} = 0$; con punto singular $p = (0, 0)$. Demostraremos por inducción que $G_p(C) = G(A_n)$ es como en el enunciado

Si $n = 1$ el resultado es más o menos trivial: en efecto, la curva C tiene ecuación $x^2 + y^2 = 0$, que se factoriza como un producto de ecuaciones de rectas, lo que muestra que es suficiente una explosión para obtener la desingularización canónica.

Si $n = 2$ tenemos la *cúbica cuspidal* de ecuación $y^2 + x^3 = 0$. Como el cono tangente está descrito por $y^2 = 0$, basta analizar la explosión en coordenadas locales $x = s, y = st$. La transformada estricta \tilde{C} de C en las coordenadas s, t tiene ecuación $t^2 + s = 0$, que es lisa, mientras que la fibra excepcional E tiene ecuación dada por $s = 0$, que es tangente a $t^2 + s = 0$ en el origen; la transformada total en este caso tiene ecuación $s(t^2 + s) = 0$. Efectuando la explosión del origen, escrita en cartas locales $s = uv, t = v$, vemos que la transformada total reducida de C tiene ecuación $uv(v + u) = 0$ lo que muestra que obtuvimos la desingularización canónica y el grafo dual es como queríamos.

Para $n > 2$, la curva C tiene ecuación $y^2 + x^{n+1}$. Con la misma explosión utilizada en el caso $n = 2$ vemos que la transformada total reducida de C tiene ecuación $t(s^2 + t^{n-1})$ y el resultado sigue por un argumento de inducción. \square

CAPÍTULO 3

Singularidades de superficies

En este capítulo haremos un esbozo de una demostración del siguiente hecho: toda superficie admite una desingularización. Mas precisamente, si X es una superficie (sobre \mathbb{C}), existe una superficie lisa Y y una aplicación analítica propia $\tau : Y \rightarrow X$ tal que la aplicación inducida por restricción $Y \setminus \tau^{-1}(\text{Sing}(X)) \rightarrow X \setminus \text{Sing}(X)$ es un difeomorfismo analítico. La demostración completa precisaría de una o dos sesiones más que las previstas para el minicurso, del cual estas notas tienen la pretensión de acompañar.

Para mantener la exposición en un nivel relativamente elemental, haremos algunas simplificaciones que nos permitirán enunciar y demostrar los resultados que queremos de una forma más económica, aunque menos general.

Primeramente, supondremos que la superficie X es una superficie contenida en \mathbb{C}^3 y que es *irreducible*, o sea, que está definida por un polinomio irreducible $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$.

Para demostrar el teorema de desingularización (teorema 3.7) precisaremos de un ingrediente cuyo tratamiento, presentado de manera adecuada, nos obligaría a abandonar nuestra intención de hacer una exposición elemental y corta. Estamos refiriéndonos al concepto de *normalización*. Diremos que la superficie X es *normal* si $\text{Sing}(X)$ es vacío o finito; en nuestro caso simplificado esto corresponde a pedir que el dominio de integridad $\mathbb{C}[X] := \mathbb{C}[x, y, z]/(f)$ sea un anillo integralmente cerrado en su cuerpo de fracciones $\mathbb{C}(X)$. Cuando $\mathbb{C}[X]$ no es integralmente cerrado, sábese que el conjunto $\widetilde{\mathbb{C}[X]}$ de los elementos de $\mathbb{C}(X)$ que son enteros sobre $\mathbb{C}[X]$, o sea que satisfacen una ecuación mónica con coeficientes en este anillo, constituyen un dominio de integridad que es integralmente cerrado: es la *clausura integral* de $\mathbb{C}[X]$ en $\mathbb{C}(X)$. Puede demostrarse, lo que no haremos, que $\widetilde{\mathbb{C}[X]}$ corresponde a una superficie (afin) X_{nor} , en general no más en \mathbb{C}^3 , y la inclusión $\mathbb{C}[X] \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{C}[X]}$ corresponde a una aplicación analítica finita (la preimagen de un punto es un conjunto finito) $\nu : X_{nor} \rightarrow X$ que induce un difeomorfismo analítico $X_{nor} \setminus \nu^{-1}(N) \rightarrow X \setminus N$, donde N es la unión de curvas de X constituidas por puntos singulares (de hecho se puede a veces extender ν en algunos puntos). La superficie X_{nor} , y también la aplicación $\nu : X_{nor} \rightarrow X$, es la normalización de X . El hecho de una aplicación entre dos superficies, digamos irreducibles, X e Y , inducir un difeomorfismo analítico entre abiertos de una y otra se expresa diciendo que la aplicación es *bimeromorfa*; es éste, por ejemplo, el caso de la normalización $\nu : X_{nor} \rightarrow X$.

EJEMPLO 3.1. a) Todas las superficies del ejercicio 1.3 son normales pues F es lisa y las restantes tienen apenas el origen como punto singular.

b) La superficie X , llamada *superficie de Whitney*, de ecuación

$$x^2 + yz^2 = 0$$

no es normal, pues $\text{Sing}(X) = \{x = y = 0\}$.

c) Idem que para (b) con la superficie de *Cayley* de ecuación

$$x^2 + y(z + y^2) = 0.$$

1. Desingularización de superficies

Sea $X \subset \mathbb{C}^3$ una superficie. Una proyección de X es la restricción a X de una proyección de \mathbb{C}^3 en \mathbb{C}^2 ; o sea, es una aplicación $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^2$, donde $\pi(p) = (h_1(p), h_2(p))$ con $h_1, h_2 \in \mathbb{C}[x, y, z]$ homogéneos de grado uno. Como vimos en el capítulo 1, si h_0 y h_1 son escogidos de manera genérica entonces existe una curva $\Delta \subset \mathbb{C}^2$ tal que $\pi^{-1}(q)$ tiene exactamente d puntos si $q \in \mathbb{C}^2 \setminus \Delta$ y menos que d puntos si $x \in \Delta$; en este caso, la curva Δ llamase la *curva de ramificación* de π .

Mas precisamente, también vimos en el primer capítulo que podemos suponer que X es el conjunto de ceros de un polinomio de grado d de la forma

$$f(x, y, z) = z^d + a_1(x, y)z^{d-1} + \cdots + a_d(x, y), \quad a_i \in \mathbb{C}[x, y].$$

En este caso, podemos, para la mayor parte de los casos, que la proyección es definida por

$$(x, y, z) \mapsto (x, y).$$

LEMA 3.2. *Sean $X \subset \mathbb{C}^2$ una superficie y $p \in \text{Sing}(X)$. Existe una proyección $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^2$ y un entorno abierto U de p en X tales que la restricción de π a U induce una aplicación finita sobre un entorno abierto de $\pi(p)$ en \mathbb{C}^2 tal que $\pi^{-1}(\pi(p)) \cap U = \{p\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Definir una proyección equivale a escoger dos polinomios lineales h_1, h_2 , no proporcionales, que se anulan a lo largo de una recta R de \mathbb{C}^3 . Ya vimos que si los polinomios son escogidos genericamente, la proyección es finita e induce un difeomorfismo local fuera de la ramificación.

Si $\pi = (h_1, h_2)$, entonces

$$\pi^{-1}(\pi(p)) = \{q \in \mathbb{C}^3 : h_1(q) - h_1(p) = h_2(q) - h_2(p) = f(q) = 0\};$$

este conjunto es la intersección de X con la recta $(p + R)$, trasladada de R . Como la restricción de f a una recta genérica tiene un número finito de ceros, concluimos que $(p + R) \cap X$ es finito si R es una recta genérica pasando por el origen de \mathbb{C}^3 . La demostración del lema está entonces terminada. □

Para terminar con los prerequisites para el teorema de desingularización, introducimos la noción de producto fibrado en el caso particular en el que lo utilizaremos.

Sean X una superficie y $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^2$ la proyección del lema precedente (o más generalmente una aplicación finita), con curva de ramificación $\Delta \subset \mathbb{C}^2$. Si $\gamma : Z \rightarrow \mathbb{C}^2$ es una aplicación analítica bimeromorfa entre superficies, definimos el *producto fibrado* de las aplicaciones π y γ como siendo el conjunto

$$X \times_{\mathbb{C}^2} Z := \{(p, q) : \pi(p) = \gamma(q)\};$$

observemos que $X \times_{\mathbb{C}^2} Z$ es un subconjunto del producto cartesiano $X \times Z$ definido pela igualdad de aplicaciones analíticas, lo que demuestra que tiene una estructura de “superficie analítica”, en el caso en que γ sea definida por la restricción de polinomios de algún \mathbb{C}^n , corresponderá a una superficie afin, o sea, a una superficie como aquellas de las que tratamos en estas notas.

Las proyecciones canónicas en el producto cartesiano $X \times Z$ inducen aplicaciones analíticas (por lo menos en el conjunto de puntos no singulares de las superficies en cuestión, esto es como en el caso diferenciable) del producto fibrado sobre X y Z respectivamente, que continuaremos llamando de proyecciones canónicas. No es difícil de demostrar que el hecho de π ser finita implica que la primera proyección es finita y que γ sea bimeromorfa (respectivamente un difeomorfismo analítico), implica que la segunda proyección canónica también será bimeromorfa (respectivamente difeomorfismo).

El problema con el producto fibrado es que mismo con X siendo normal e Y lisa, $X \times_{\mathbb{C}^2} Z$ puede dejar de ser normal. Si Δ es lisa, entonces X también lo es, por causa del lema 3.4, y se ve más o menos fácilmente que el producto fibrado también lo será; pero si X no es lisa, pueden pasar cosas feas por causa de las singularidades de la ramificación: veamos dos ejemplos

EJEMPLO 3.3. a) Consideremos la superficie

$$z^2 + x^2 + y^3 = 0;$$

tiene una única singularidad en el origen. La ramificación de la proyección sobre el plano x, y es la curva $\Delta = \{(a, b) : f_z(a, b, z) = f(a, b, z) = 0\} = \{x^2 + y^3 = 0\}$. Si $\gamma : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ es la aplicación $\gamma(u, v) = (uv, v)$, que es una carta local de la explosión de \mathbb{C}^2 en el origen, tenemos

$$X \times_{\mathbb{C}^2} \mathbb{C}^2 = \{(x, y, z, u, v) : z^2 + x^2 + y^3 = 0, x = uv, y = v\} \subset \mathbb{C}^5;$$

entonces $X \times_{\Delta} \mathbb{C}$ es analíticamente difeomorfa a la superficie de \mathbb{C}^3 definida por la ecuación

$$z^2 + u^2v^2 + v^3 = 0,$$

cuyo conjunto singular es la recta $z = v = 0$.

b) Una conclusión completamente análoga es obtenida en el caso de la superficie de ecuación $z^3 + xy$, donde la ramificación sobre el plano x, y está definida por $xy = 0$ (punto doble ordinario).

El siguiente lema va sin demostración; para demostrarlo, una posibilidad es utilizar una generalización del teorema de la implícita que describe localmente una aplicación finita que ramifica a lo largo de una curva lisa, digamos de ecuación $y = g(x)$; no tengo una referencia conocida, talves sea un ejercicio. Con Marcos Sebastiani escribimos una prueba en [PaSe, Cap. I, §2])

LEMA 3.4. *Sea $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^2$ una proyección finita con curva de ramificación Δ . Si $p \in \text{Sing}(X)$, entonces $\pi(p)$ es un punto singular de Δ .*

De manera análoga a como definimos la explosión de una superficie (local) lisa en un punto, podemos definir la explosión de (un abierto de) \mathbb{C}^3 en $p = (0, 0, 0)$. Una manera de hacerlo concretamente es la de "pegar" las siguientes tres cartas locales

$$(t, u, v) \mapsto (t, tu, tv)$$

$$(t, u, v) \mapsto (tu, u, uv)$$

$$(t, u, v) \mapsto (tv, uv, v).$$

Aquí la fibra excepcional es un plano proyectivo cuya ecuación en cada carta es, respectivamente, $t = 0$, $u = 0$, $v = 0$.

La idea de la demostración que vamos a bosquejar en el teorema 3.7 reposa sobre el siguiente resultado no trivial, cuya demostración daremos apenas en el caso más simple, que corresponde a la desingularización de un tipo especial de superficie.

PROPOSICIÓN 3.5. *Supongamos que $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^2$ sea una proyección (finita) sobre \mathbb{C}^2 cuya curva de ramificación, digamos Δ , es lisa o con apenas puntos dobles ordinarios. Entonces,*

a) *Si $p \in \text{Sing}(X)$ entonces $\pi(p)$ es un punto singular de Δ .*

b) *Existe una superficie lisa Y y una aplicación bimeromorfa $\eta : Y \rightarrow X$.*

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos apenas el caso más simple en que $X \subset \mathbb{C}^3$ es la superficie de ecuación

$$z^d + xy = 0, \quad d \geq 1.$$

Si $d = 1$ la superficie es lisa y no hay nada para probar. Supongamos $d \geq 2$.

La afirmación (a) es un ejercicio facil para el lector (y es un caso particular del lema precedente).

Consideremos la aplicación analítica $\sigma : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definida por

$$(t, u, v) \mapsto (t, tu, tv)$$

(que es una carta local de lo que llamase la explosión de \mathbb{C}^3 en el origen). Esta aplicación induce un difeomorfismo analítico de $\mathbb{C}^3 \setminus \{t = 0\}$ en $\mathbb{C}^3 - \{t = 0\}$. Componiendo con la ecuación de X obtenemos la ecuación

$$t^2(v^d t^{d-2} + u) = 0.$$

Un cálculo directo muestra que la ecuación $v^d t^{d-2} + u = 0$, que corresponde a la *transformada estricta* de la superficie original, define una superficie lisa Y (verifique!). Encontramos una situación análoga en el caso de la segunda carta local de la explosión.

Finalmente, calculemos la transformada estricta con respecto a la tercera carta:

$$(t, u, v) \mapsto (tv, uv, v).$$

Obtenemos

$$v^{d-2} + tu = 0,$$

que es del mismo tipo que la ecuación original, pero donde el grado d fue remplazado por $d - 2$; un argumento de inducción termina la prueba. □

NOTA 3.6. La proposición nos garantiza que existe una desingularización de superficies que son *recubrimientos ramificados* de \mathbb{C}^2 que ramifican a lo largo de curvas con cruzamientos normales. Una demostración general de esto reposa en el hecho del conocimiento de la estructura local de un tal recubrimientos ramificado. Mas precisamente, si $\varphi : U \rightarrow V$ es una aplicación finita de *orden* d (o sea, que la preimágen de un punto de $V - \Delta$ tiene d preimágenes) entre una superficie (local) normal y un disco V de \mathbb{C}^2 centrado en el origen cuyo conjunto de ramificación es $\Delta = \{xy = 0\}$, con $\varphi(p) = (0, 0)$, puede mostrarse que U es difeomorfo analíticamente a una superficie (local) de \mathbb{C}^3 de ecuación

$$z^d = x^a y^b,$$

de forma que φ corresponde a la proyección sobre el plano x, y .

La demostración de este hecho, se hace observando que φ induce por restricción a $U^* := U - \pi^{-1}(\Delta)$ un recubrimiento no ramificado sobre $V^* := V - \Delta$ y que el homomorfismo inducido en la homotopia $\varphi_* : \pi(U^*) \rightarrow \pi(V^*)$ junto con éste determinan el correspondiente recubrimiento ramificado (el lector interesado puede consultar los detalles en [BPV, chap. III, §5]).

Finalmente, si admitimos esta descripción local podemos demostrar la proposición arriba intentando una desingularización de una superficie con ecuación

$$z^d = x^a y^b.$$

TEOREMA 3.7 (Teorema de desingularización). *Sea X una superficie con conjunto singular $\text{Sing}(X)$. Existe una superficie lisa Y y una aplicación analítica propia $\eta : Y \rightarrow X$ que induce un difeomorfismo analítico $Y \setminus \tau^{-1}(\text{Sing}(X)) \rightarrow X \setminus \text{Sing}(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. (Esbozo) Substituyendo X por X_{nor} podemos suponer que X es normal; aceptando que basta saber desingularizar localmente, podemos también suponer que $\text{Sing}(X) = \{p\}$. Sea $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^2$ una proyección como la del lema 3.2 con curva de ramificación Δ ; gracias al carácter local de las afirmaciones, la proposición 3.4 implica que las singularidades de X están

en las fibras por π de los puntos singulares de Δ . Sea $\tau : Z = \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$ una modificación de \mathbb{C}^2 de forma que las únicas singularidades de $\tau^{-1}(\Delta)$ sean puntos dobles ordinarios (corolario 2.2). Consideramos el producto fibrado $X_1 := X \times_{\mathbb{C}^2} Z$ y las proyecciones canónicas $\phi_1 : X_1 \rightarrow X$ y $\phi_2 : X_1 \rightarrow Z$; en el caso en que X_1 no sea normal, sustituimos esta superficie por su normalización, que continuaremos denotando por X_1 . Como vimos, ϕ_1 induce un difeomorfismo analítico entre $X_1 \setminus \phi_1^{-1}(\text{Sing}(X))$ y $X \setminus \text{Sing}(X)$. Por otro lado, ϕ_2 es una aplicación finita con curva de ramificación en $\tau^{-1}(\Delta)$; esta aplicación está en la hipótesis de la proposición 3.5, lo que termina la argumentación.

□

]

Bibliografía

- [ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths, J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves, Volume I*, Springer, 1985.
- [Bri] E. Brieskorn, Rationale singularitäten komplexer Flächen, *Inv. Math.*, 4 (1968), 336-358.
- [Ba] L. Badescu, *Algebraic Surfaces*, Springer UTX, 2001.
- [BEV] A. Bravo, S. Encinas, O. Villamayor, *A simplified proof of desingularization and applications*, *Rev. Mat. Iberoamericana*, 19 (2) (2003).
- [BPV] W. Barth, C. Peters, and A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Springer-Verlag, 1984.
- [Fu] W. Fulton, *Algebraic Curves: an Introduction to Algebraic geometry*, Benjamin, New York, 1969.
- [FuHa] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory*, Springer-Verlag, (1991).
- [GS] G. González-Sprinberg, *Éventails en dimension 2 et transformé de Nash*, Publications de l'E.N.S., Paris (1977).
- [GS1] G. González-Sprinberg, *Désingularisation des surfaces par des modifications de Nash normalisées*, Séminaire Bourbaki, Exposé 661, Astérisque No. 145-146, (1987), 187-207.
- [Har] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, (1977).
- [Hau] H. Hauser, *The Hironaka theorem on resolution of singularities (Or: A proof we always wanted to understand)*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 40 (2003), 323-403.
- [Hu] K. Hulek, *Elementary Algebraic Geometry*, Student Mathematical Library, Vol. 20, AMS, 2003.
- [LJ] , M. Lejeune-Jalabert, *Arcs analytiques et résolution minimale des surfaces quasihomogènes*, *Lecture Notes in Math.* 777 (1980), 303-336.
- [Lip] J. Lipman, *Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorizations*, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 36 (1969), 195-279.
- [Mi] J. Milnor, *Singular points of complex isolated singularities*, *Annals of Mathematics Studies*, No. 61, Princeton University Press, Princeton, N. Y. 1968
- [Mu] D. Mumford, *Algebraic Geometry, I. Complex Projective Spaces*, Springer-Verlag, N.Y., 1976.
- [PaSe] I. Pan, M. Sebastiani, *Les équations différentielles algébriques et les singularités mobiles*, *Ensaos Matemáticos*, Soc. Bras. Mat., vol 8, 2004.
- [Ri] M. Ried, *Minimal Models of Canonical 3-folds*, *Algebraic Varieties and Analytic Varieties*, *Advanced studies in Pure Math.*1, (1983).
- [Sha] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 1*, Springer-Verlag, 1994.
- [Sp] M. Spivakovsky, *Sandwiched Singularities and Desingularization of Surfaces by Normalized Nash Transformations*, *Annals of Mathematics*, 2nd Ser., Vol. 131, No. 3 (May, 1990), pp. 411-491.
- [Va] I. Vaisencher, *Introdução às Curvas Algébricas Planas*, Coleção Matemática Universitaria, IMPA, Rio de Janeiro, 1996.