Teorías de campos, gravedad, y teorías conformes

M. Farinati - elENA 4 - La Falda

5 de agosto de 2008

Plan

Plan

- I. Teorías clásicas de campos.

Plan

- I. Teorías clásicas de campos.
  - Ejemplos.
  - Principio variacional

Plan

- I. Teorías clásicas de campos.
  - Ejemplos.
  - Principio variacional
- II. Invarianzas

Plan

- I. Teorías clásicas de campos.
  - Ejemplos.
  - Principio variacional
- II. Invarianzas
  - Ejemplos
  - Teorema de Noether

Plan

- I. Teorías clásicas de campos.
  - Ejemplos.
  - Principio variacional
- II. Invarianzas
  - Ejemplos
  - Teorema de Noether
- El grupo y el álgebra conforme.

Plan

- I. Teorías clásicas de campos.
  - Ejemplos.
  - Principio variacional
- II. Invarianzas
  - Ejemplos
  - Teorema de Noether
- El grupo y el álgebra conforme.
  - El álgebra conforme en dimensión $D \geq 3$, y en $D = 2$.
  - El álgebra de Virasoro

Plan

- I. Teorías clásicas de campos.
  - Ejemplos.
  - Principio variacional
- II. Invarianzas
  - Ejemplos
  - Teorema de Noether
- El grupo y el álgebra conforme.
  - El álgebra conforme en dimensión $D \geq 3$, y en $D = 2$.
  - El álgebra de Virasoro
- IV. Teorías de campos cuánticas.

Plan

- I. Teorías clásicas de campos.
  - Ejemplos.
  - Principio variacional
- II. Invarianzas
  - Ejemplos
  - Teorema de Noether
- El grupo y el álgebra conforme.
  - El álgebra conforme en dimensión $D \geq 3$, y en $D = 2$.
  - El álgebra de Virasoro
- IV. Teorías de campos cuánticas.
  - Cuantización canónica.
  - Algunos problemas

Plan

- I. Teorías clásicas de campos.
  - Ejemplos.
  - Principio variacional
- II. Invarianzas
  - Ejemplos
  - Teorema de Noether
- El grupo y el álgebra conforme.
  - El álgebra conforme en dimensión $D \geq 3$, y en $D = 2$.
  - El álgebra de Virasoro
- IV. Teorías de campos cuánticas.
  - Cuantización canónica.
  - Algunos problemas
- V. CFT: Teorías de campos conformes.
  - CFT's en la naturaleza.
  - El espacio Anti de Sitter (AdS).
  - Correspondencia AdS/CFT.

I. Teorías clásicas de campos

I. Teorías clásicas de campos

Qué es una teoría de campos?

I. Teorías clásicas de campos

Qué es una teoría de campos?

Una teoría de campos clásicas es una ecuación en derivadas parciales, para ciertas "funciones", denominados "campos".

I. Teorías clásicas de campos

Qué es una teoría de campos?

Una teoría de campos clásicas es una ecuación en derivadas parciales, para ciertas “funciones”, denominados “campos”.

Ejemplos:

I. Teorías clásicas de campos - Ejemplos

Ecuación de ondas

I. Teorías clásicas de campos - Ejemplos

Ecuación de ondas

$$0 = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Box \phi$$

I. Teorías clásicas de campos - Ejemplos

Ecuación de ondas

$$0 = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Box \phi$$

Electromagnetismo

I. Teorías clásicas de campos - Ejemplos

Ecuación de ondas

$$0 = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Box \phi$$

Electromagnetismo
Las ecuaciones de campo clásicas son las llamadas ecuaciones de Maxwell para (los campos vectoriales) E y B:

I. Teorías clásicas de campos - Ejemplos

Ecuación de ondas

$$0 = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Box \phi$$

Electromagnetismo
Las ecuaciones de campo clásicas son las llamadas ecuaciones de Maxwell para (los campos vectoriales) E y B:

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot E = \rho$$

$$\nabla \times B = j + \frac{\partial E}{\partial t}$$

I. Teorías clásicas de campos - Ejemplos

Relatividad general

I. Teorías clásicas de campos - Ejemplos

Relatividad general

La incógnita de relatividad general es una métrica $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ Lorenziana, es decir, de signatura $(-, + \cdots +)$.

I. Teorías clásicas de campos - Ejemplos

Relatividad general

La incógnita de relatividad general es una métrica $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ Lorenziana, es decir, de signatura $(-, + \cdots +)$.

La ecuación de Einstein (en el vacío) para una métrica $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ es

$$Ric - \frac{1}{2}(R + \Lambda)g = 0$$

I. Teorías clásicas de campos - Ejemplos

Relatividad general

La incógnita de relatividad general es una métrica $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ Lorenziana, es decir, de signatura $(-, + \cdots +)$.

La ecuación de Einstein (en el vacío) para una métrica $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ es

$$Ric - \frac{1}{2}(R + \Lambda)g = 0$$

Donde *Ric* es el tensor de Ricci, depende de la métrica g y de sus derivadas (hasta la derivada segunda), R es el escalar de curvatura, y Λ es una constante, denominada constante cosmológica.

I. Teorías clásicas de campos - Ejemplos

Relatividad general

La incógnita de relatividad general es una métrica $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ Lorenziana, es decir, de signatura $(-, + \cdots +)$.

La ecuación de Einstein (en el vacío) para una métrica $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ es

$$Ric - \frac{1}{2}(R + \Lambda)g = 0$$

Donde *Ric* es el tensor de Ricci, depende de la métrica g y de sus derivadas (hasta la derivada segunda), R es el escalar de curvatura, y Λ es una constante, denominada constante cosmológica.

A diferencia de las anteriores (onda, y electromagnetismo), la ecuación diferencial de la relatividad general es *no lineal*.

I. Teorías clásicas de campos - Principio variacional

Euler - Lagrange

I. Teorías clásicas de campos - Principio variacional

Euler - Lagrange

Marco general:

I. Teorías clásicas de campos - Principio variacional

Euler - Lagrange

Marco general:
$G = SO(1, D-1) \rtimes \mathbb{R}^D = \mathrm{ISO}(\mathbb{R}^D, (- + \cdots +))$

I. Teorías clásicas de campos - Principio variacional

Euler - Lagrange

Marco general:
$G = SO(1, D-1) \rtimes \mathbb{R}^D = \mathrm{ISO}(\mathbb{R}^D, (- + \cdots +))$
V una representación (real o compleja) de G, o de
$\mathfrak{g} = T_e(G) = Lie(G)$

I. Teorías clásicas de campos - Principio variacional

Euler - Lagrange

Marco general:
$G = SO(1, D-1) \rtimes \mathbb{R}^D = \mathrm{ISO}(\mathbb{R}^D, (- + \cdots +))$
V una representación (real o compleja) de G, o de
$\mathfrak{g} = T_e(G) = Lie(G)$

Un campo (en el espacio de Minkowski M) es una función $\phi : M \to V$ que satisface cierta ecuacion diferencial.

I. Teorías clásicas de campos - Principio variacional

Euler - Lagrange

Marco general:
$G = SO(1, D-1) \rtimes \mathbb{R}^D = \mathrm{ISO}(\mathbb{R}^D, (- + \cdots +))$
V una representación (real o compleja) de G, o de
$\mathfrak{g} = T_e(G) = Lie(G)$

Un campo (en el espacio de Minkowski M) es una función $\phi : M \to V$ que satisface cierta ecuacion diferencial. Muchas veces, estas ecuaciones provienen de un principio variacional.

I. Teorías clásicas de campos - Principio variacional

Euler - Lagrange

Marco general:
$G = SO(1, D-1) \rtimes \mathbb{R}^D = \mathrm{ISO}(\mathbb{R}^D, (- + \cdots +))$
V una representación (real o compleja) de G, o de
$\mathfrak{g} = T_e(G) = Lie(G)$

Un campo (en el espacio de Minkowski M) es una función $\phi : M \to V$ que satisface cierta ecuacion diferencial. Muchas veces, estas ecuaciones provienen de un principio variacional.

Tomamos $S(\phi) = \int_M d^D x L(\phi(x), \partial\phi(x), x)$, donde L se denomina el Lagrangiano, y S se llama la acción.

I. Teorías clásicas de campos - Principio variacional

Euler - Lagrange

Marco general:
$G = SO(1, D-1) \rtimes \mathbb{R}^D = \mathrm{ISO}(\mathbb{R}^D, (- + \cdots +))$
V una representación (real o compleja) de G, o de
$\mathfrak{g} = T_e(G) = Lie(G)$

Un campo (en el espacio de Minkowski M) es una función $\phi : M \to V$ que satisface cierta ecuacion diferencial. Muchas veces, estas ecuaciones provienen de un principio variacional.

Tomamos $S(\phi) = \int_M d^D x L(\phi(x), \partial\phi(x), x)$, donde L se denomina el Lagrangiano, y S se llama la acción.

Si $L = L(\phi, \partial\phi, x)$, las ecuaciones de Euler-Lagrange para minimizar (mejor dicho, buscar puntos criticos de) la acción es

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi}$$

I. Teorías clásicas de campos

Ecuación de Klein - Gordon

I. Teorías clásicas de campos

Ecuación de Klein - Gordon

$$L = \frac{1}{2}(m\phi^2 + |\nabla\phi|^2) = \frac{1}{2}(m\phi^2 + \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) = \frac{1}{2}(m\phi^2 + \partial^\mu\phi\partial_\nu\phi)$$

I. Teorías clásicas de campos

Ecuación de Klein - Gordon

$$L = \frac{1}{2}(m\phi^2 + |\nabla\phi|^2) = \frac{1}{2}(m\phi^2 + \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) = \frac{1}{2}(m\phi^2 + \partial^\mu\phi\partial_\nu\phi)$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{\mu\nu}$$

I. Teorías clásicas de campos

Ecuación de Klein - Gordon

$$L = \frac{1}{2}(m\phi^2 + |\nabla\phi|^2) = \frac{1}{2}(m\phi^2 + \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) = \frac{1}{2}(m\phi^2 + \partial^\mu\phi\partial_\nu\phi)$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\phi} = m\phi$$

I. Teorías clásicas de campos

Ecuación de Klein - Gordon

$$L = \frac{1}{2}(m\phi^2 + |\nabla\phi|^2) = \frac{1}{2}(m\phi^2 + \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) = \frac{1}{2}(m\phi^2 + \partial^\mu\phi\partial_\nu\phi)$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = m\phi$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi$$

I. Teorías clásicas de campos

Ecuación de Klein - Gordon

$$L = \frac{1}{2}(m\phi^2 + |\nabla\phi|^2) = \frac{1}{2}(m\phi^2 + \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) = \frac{1}{2}(m\phi^2 + \partial^\mu\phi\partial_\nu\phi)$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\phi} = m\phi$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = \Box\phi$$

I. Teorías clásicas de campos

Ecuación de Klein - Gordon

$$L = \frac{1}{2}(m\phi^2 + |\nabla\phi|^2) = \frac{1}{2}(m\phi^2 + \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) = \frac{1}{2}(m\phi^2 + \partial^\mu\phi\partial_\nu\phi)$$

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\phi} = m\phi$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = \Box\phi$$

$$E - L: \ \Box\phi = m\phi$$

I. Teorías clásicas de campos

Electromagnetismo II

I. Teorías clásicas de campos

Electromagnetismo II

A una 1-forma, $A = A_\mu dx^\mu$,

$$F = dA = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

I. Teorías clásicas de campos

Electromagnetismo II
A una 1-forma, $A = A_\mu dx^\mu$,

$$F = dA = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$S_{Maxwell} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j^\mu A_\mu \right)$$

donde $j^\mu = (\rho, j_1, j_2, j_3)$

I. Teorías clásicas de campos

Electromagnetismo II

A una 1-forma, $A = A_\mu dx^\mu$,

$$F = dA = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$S_{Maxwell} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j^\mu A_\mu \right)$$

donde $j^\mu = (\rho, j_1, j_2, j_3)$

$$E - L : \left\{ \begin{array}{rcl} dF & = & 0 \\ *d*F & = & j \end{array} \right.$$

si $F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu}$

I. Teorías clásicas de campos

Electromagnetismo II

A una 1-forma, $A = A_\mu dx^\mu$,

$$F = dA = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$S_{Maxwell} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j^\mu A_\mu \right)$$

donde $j^\mu = (\rho, j_1, j_2, j_3)$

$$E - L : \left\{ \begin{array}{rcl} dF & = & 0 \\ *d*F & = & j \end{array} \right.$$

si $F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu}$ entonces $dF = 0$ es $\nabla \cdot B = 0$ y $\nabla \times E + \partial_t B = 0$,

I. Teorías clásicas de campos

Electromagnetismo II

A una 1-forma, $A = A_\mu dx^\mu$,

$$F = dA = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$S_{Maxwell} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j^\mu A_\mu \right)$$

donde $j^\mu = (\rho, j_1, j_2, j_3)$

$$E - L : \left\{ \begin{array}{ccc} dF & = & 0 \\ *d*F & = & j \end{array} \right.$$

si $F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $dF = 0$ es $\nabla \cdot B = 0$ y $\nabla \times E + \partial_t B = 0$, y $*d*F = j$ es $\overset{\mu\nu}{\nabla} \cdot E = \rho$ y $\nabla \times B - \partial_t E = j$.

I. Teorías clásicas de campos

Yang-Mills

I. Teorías clásicas de campos

Yang-Mills

$\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, y A una 1-forma a valores en $\mathfrak{g}$.

I. Teorías clásicas de campos

Yang-Mills
$\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, y A una 1-forma a valores en $\mathfrak{g}$.
Si $\{J_a\}_a$ es una base de $\mathfrak{g}$,

$$A = A^a_\mu J_a dx^\mu$$

se define

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu]$$

I. Teorías clásicas de campos

Yang-Mills
$\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, y A una 1-forma a valores en $\mathfrak{g}$.
Si $\{J_a\}_a$ es una base de $\mathfrak{g}$,

$$A = A_\mu^a J_a dx^\mu$$

se define

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu]$$

$$= \partial_\mu A_\nu^a J_a - \partial_\nu A_\mu^a J_a + g[A_\mu^a J_a, A_\nu^b J_b] = \partial_\mu A_\nu^a J_a - \partial_\nu A_\mu^a J_a + g A_\mu^a A_\nu^b [J_a, J_b]$$

La acción es

$$S_{YM} = \int d^4x \mathrm{Tr}_{\mathrm{ad}}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$$

I. Teorías clásicas de campos

Yang-Mills
$\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, y A una 1-forma a valores en $\mathfrak{g}$.
Si $\{J_a\}_a$ es una base de $\mathfrak{g}$,

$$A = A^a_\mu J_a dx^\mu$$

se define

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu]$$

$$= \partial_\mu A^a_\nu J_a - \partial_\nu A^a_\mu J_a + g[A^a_\mu J_a, A^b_\nu J_b] = \partial_\mu A^a_\nu J_a - \partial_\nu A^a_\mu J_a + g A^a_\mu A^b_\nu [J_a, J_b]$$

La acción es

$$S_{YM} = \int d^4x \mathrm{Tr}_{\mathrm{ad}}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(1) = \mathbb{R}$, entonces Y-M es Maxwell (sin corriente).

I. Teorías clásicas de campos

Yang-Mills
$\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, y A una 1-forma a valores en $\mathfrak{g}$.
Si $\{J_a\}_a$ es una base de $\mathfrak{g}$,

$$A = A_\mu^a J_a dx^\mu$$

se define

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu]$$

$$= \partial_\mu A_\nu^a J_a - \partial_\nu A_\mu^a J_a + g[A_\mu^a J_a, A_\nu^b J_b] = \partial_\mu A_\nu^a J_a - \partial_\nu A_\mu^a J_a + g A_\mu^a A_\nu^b [J_a, J_b]$$

La acción es

$$S_{YM} = \int d^4x \mathrm{Tr}_{\mathrm{ad}}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$$

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(1) = \mathbb{R}$, entonces Y-M es Maxwell (sin corriente).
Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(3)$ es (esencialmente) el modelo standard de partículas.

I. Teorías clásicas de campos

Relatividad general

I. Teorías clásicas de campos

Relatividad general

$$S_{Einstein} = \int d^D x \sqrt{-g}(R + \Lambda)$$

I. Teorías clásicas de campos

Relatividad general

$$S_{Einstein} = \int d^D x \sqrt{-g}(R + \Lambda) = \int (R + \Lambda) d\mathrm{Vol}$$

donde $R =$ escalar de Ricci, $R = R(g, \partial_\mu g, \partial_\mu \partial_\nu g)$, y Λ es una constante.

I. Teorías clásicas de campos

Relatividad general

$$S_{Einstein} = \int d^D x \sqrt{-g}(R + \Lambda) = \int (R + \Lambda) d\text{Vol}$$

donde $R =$ escalar de Ricci, $R = R(g, \partial_\mu g, \partial_\mu \partial_\nu g)$, y Λ es una constante.

La ecuación de Euler-Lagrange es:

$$Ric - \frac{1}{2}(R + \Lambda)g = 0$$

I. Teorías clásicas de campos

Chern-Simon (dimensiones impares)

En dimensión tres:

$A = A_\mu dx^\mu$ una 1-forma, $F = dA = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu$,

$$S_{CS} = \int A \wedge F = \int A \wedge dA$$

I. Teorías clásicas de campos

Chern-Simon (dimensiones impares)

En dimensión tres:

$A = A_\mu dx^\mu$ una 1-forma, $F = dA = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu$,

$$S_{CS} = \int A \wedge F = \int A \wedge dA$$

No hay dependencia explícita de la métrica, es una teoría *topológica*.

I. Teorías clásicas de campos

Chern-Simon (dimensiones impares)

En dimensión tres:
$A = A_\mu dx^\mu$ una 1-forma, $F = dA = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu$,

$$S_{CS} = \int A \wedge F = \int A \wedge dA$$

No hay dependencia explícita de la métrica, es una teoría *topológica*.

En el caso no abeliano (con A una forma a valores en un álgebra de Lie): $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu]$,

$$S_{CS} = \int Tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$$

I. Teorías clásicas de campos

Chern-Simon (dimensiones impares)

En dimensión tres:
$A = A_\mu dx^\mu$ una 1-forma, $F = dA = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu$,

$$S_{CS} = \int A \wedge F = \int A \wedge dA$$

No hay dependencia explícita de la métrica, es una teoría *topológica*.

En el caso no abeliano (con A una forma a valores en un álgebra de Lie): $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu]$,

$$S_{CS} = \int Tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$$

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,2)$ (Witten) se tiene la relatividad en dimension tres!

I. Teorías clásicas de campos

Chern-Simon (dimensiones impares)

En dimensión tres:
$A = A_\mu dx^\mu$ una 1-forma, $F = dA = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu$,

$$S_{CS} = \int A \wedge F = \int A \wedge dA$$

No hay dependencia explícita de la métrica, es una teoría *topológica*.

En el caso no abeliano (con A una forma a valores en un álgebra de Lie): $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu]$,

$$S_{CS} = \int Tr(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$$

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,2)$ (Witten) se tiene la relatividad en dimension tres!
En dimensión cinco:

$$S_{CS} = \int Tr(A \wedge dA \wedge dA + \frac{1}{5} A \wedge A \wedge A \wedge dA + \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A \wedge A \wedge A)$$

II. Invarianzas

(M, g) variedad con métrica (Lorenziana),

II. Invarianzas

(M, g) variedad con métrica (Lorenziana),
$E \to M$ un fibrado con una acción de $\mathrm{SO}(g)$,

II. Invarianzas

(M, g) variedad con métrica (Lorenziana),
$E \to M$ un fibrado con una acción de $\mathrm{SO}(g)$,
G un grupo que actúa en el fibrado, L un lagrangiano.

II. Invarianzas

(M, g) variedad con métrica (Lorenziana),
$E \to M$ un fibrado con una acción de $\mathrm{SO}(g)$,
G un grupo que actúa en el fibrado, L un lagrangiano.
Diremos que la teoría es G-invariante si L es invariante,

II. Invarianzas

(M, g) variedad con métrica (Lorenziana),
$E \to M$ un fibrado con una acción de $\mathrm{SO}(g)$,
G un grupo que actúa en el fibrado, L un lagrangiano.
Diremos que la teoría es G-invariante si L es invariante, o incluso si

$$L(\phi, \partial\phi, x)d^D x - {}^g(L(\phi, \partial\phi, x)d^D x) = d(\eta(g))\ \forall g \in G,\ \eta \in \Omega^{D-1}(M)$$

II. Invarianzas

(M, g) variedad con métrica (Lorenziana),
$E \to M$ un fibrado con una acción de $\mathrm{SO}(g)$,
G un grupo que actúa en el fibrado, L un lagrangiano.
Diremos que la teoría es G-invariante si L es invariante, o incluso si

$$L(\phi, \partial\phi, x)d^D x - {}^g(L(\phi, \partial\phi, x)d^D x) = d(\eta(g)) \; \forall g \in G, \; \eta \in \Omega^{D-1}(M)$$

con lo cual, las ecuaciones de movimiento para L y ${}^gL$ son las mismas.

II. Invarianzas

(M, g) variedad con métrica (Lorenziana),
$E \to M$ un fibrado con una acción de $\mathrm{SO}(g)$,
G un grupo que actúa en el fibrado, L un lagrangiano.
Diremos que la teoría es G-invariante si L es invariante, o incluso si

$$L(\phi, \partial\phi, x)d^D x - {}^g(L(\phi, \partial\phi, x)d^D x) = d(\eta(g)) \; \forall g \in G, \; \eta \in \Omega^{D-1}(M)$$

con lo cual, las ecuaciones de movimiento para L y ${}^gL$ son las mismas.
Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, diremos que la teoría es $\mathfrak{g}$-invariante si

$$X.(L(\phi, \partial\phi, x)d^D x) = d(\eta(X)) \; \forall X \in \mathfrak{g}$$

II. Invarianzas

(M, g) variedad con métrica (Lorenziana),
$E \to M$ un fibrado con una acción de $\mathrm{SO}(g)$,
G un grupo que actúa en el fibrado, L un lagrangiano.
Diremos que la teoría es G-invariante si L es invariante, o incluso si

$$L(\phi, \partial\phi, x)d^D x - {}^{g}(L(\phi, \partial\phi, x)d^D x) = d(\eta(g)) \; \forall g \in G, \; \eta \in \Omega^{D-1}(M)$$

con lo cual, las ecuaciones de movimiento para L y ${}^{g}L$ son las mismas.
Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, diremos que la teoría es $\mathfrak{g}$-invariante si

$$X.(L(\phi, \partial\phi, x)d^D x) = d(\eta(X)) \; \forall X \in \mathfrak{g}$$

Si la teoría es G-invariante para un grupo de Lie G, entones lo será para $\mathfrak{g} = T_e G$.

II. Invarianzas

(M, g) variedad con métrica (Lorenziana),
$E \to M$ un fibrado con una acción de $\mathrm{SO}(g)$,
G un grupo que actúa en el fibrado, L un lagrangiano.
Diremos que la teoría es G-invariante si L es invariante, o incluso si

$$L(\phi, \partial\phi, x)d^D x - {}^g(L(\phi, \partial\phi, x)d^D x) = d(\eta(g)) \; \forall g \in G, \; \eta \in \Omega^{D-1}(M)$$

con lo cual, las ecuaciones de movimiento para L y ${}^g L$ son las mismas.
Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, diremos que la teoría es $\mathfrak{g}$-invariante si

$$X.(L(\phi, \partial\phi, x)d^D x) = d(\eta(X)) \; \forall X \in \mathfrak{g}$$

Si la teoría es G-invariante para un grupo de Lie G, entones lo será para $\mathfrak{g} = T_e G$.
Si la teoría no está dada por un Lagrangiano, sino por un operador diferencial $\mathcal{D}$, diremos que g es una simetría de la teoría si g actúa en el espacio de soluciones de $\mathcal{D}$.

II. Invarianzas

(M, g) variedad con métrica (Lorenziana),
$E \to M$ un fibrado con una acción de $\mathrm{SO}(g)$,
G un grupo que actúa en el fibrado, L un lagrangiano.
Diremos que la teoría es G-invariante si L es invariante, o incluso si

$$L(\phi, \partial\phi, x)d^D x - {}^g(L(\phi, \partial\phi, x)d^D x) = d(\eta(g)) \ \forall g \in G, \ \eta \in \Omega^{D-1}(M)$$

con lo cual, las ecuaciones de movimiento para L y ${}^gL$ son las mismas.
Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, diremos que la teoría es $\mathfrak{g}$-invariante si

$$X.(L(\phi, \partial\phi, x)d^D x) = d(\eta(X)) \ \forall X \in \mathfrak{g}$$

Si la teoría es G-invariante para un grupo de Lie G, entones lo será para $\mathfrak{g} = T_e G$.
Si la teoría no está dada por un Lagrangiano, sino por un operador diferencial $\mathcal{D}$, diremos que g es una simetría de la teoría si g actúa en el espacio de soluciones de $\mathcal{D}$. Es decir, $\mathcal{D}(\phi) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}({}^g\phi) = 0$.

II. Invarianzas: Ejemplos

II. Invarianzas: Ejemplos

- Si $L(\phi, \partial\phi, x) = L(\phi, \partial\phi)$, entonces se tiene invarianza por traslaciones espaciales y temporales.

  En este caso, la transformación infinitesimal asociada es $\delta x = (\epsilon, 0, \ldots, 0)$ y $\delta\phi = \epsilon\partial_t\phi$.

II. Invarianzas: Ejemplos

- Si $L(\phi, \partial\phi, x) = L(\phi, \partial\phi)$, entonces se tiene invarianza por traslaciones espaciales y temporales.

  En este caso, la transformación infinitesimal asociada es $\delta x = (\epsilon, 0, \ldots, 0)$ y $\delta\phi = \epsilon\partial_t\phi$.

- Si $L = \frac{1}{2}(m(\phi_1^2 + \phi_2^2) + |\nabla\phi_1|^2 + |\nabla\phi_2|^2$, entonces la teoría tiene invarianza por

  $$\phi_1 \mapsto \cos\theta\phi_1 + \sin\theta\phi_2;$$

  $$\phi_2 \mapsto -\sin\theta\phi_1 + \cos\theta\phi_2$$

  En este caso $\delta x = 0$ y $\delta(\phi_1, \phi_2) = (\epsilon\phi_2, -\epsilon\phi_1)$.

II. Invarianzas: Teorema de Noether

II. Invarianzas: Teorema de Noether

Para cada transformación infinitesimal

$$x \mapsto x' = x + \epsilon\xi$$

II. Invarianzas: Teorema de Noether

Para cada transformación infinitesimal

$$\begin{array}{ccccc} x & \mapsto & x' & = & x & + & \epsilon\xi \\ \phi(x) & \mapsto & \phi'(x') & & & & \end{array}$$

II. Invarianzas: Teorema de Noether

Para cada transformación infinitesimal

$$\begin{array}{ccccccc} x & \mapsto & x' & = & x & + & \epsilon\xi \\ \phi(x) & \mapsto & \phi'(x') & = & \phi(x) & + & \epsilon\partial_\mu\phi(X)\xi^\mu + \epsilon G(\phi(x)) \end{array}$$

II. Invarianzas: Teorema de Noether

Para cada transformación infinitesimal

$$\begin{array}{ccccccc} x & \mapsto & x' & = & x & + & \epsilon\xi \\ \phi(x) & \mapsto & \phi'(x') & = & \phi(x) & + & \epsilon\partial_\mu\phi(X)\xi^\mu + \epsilon G(\phi(x)) \\ & & & =: & \phi & + & \delta\phi \end{array}$$

que deje invariante la acción S,

II. Invarianzas: Teorema de Noether

Para cada transformación infinitesimal

$$\begin{array}{ccccccc} x & \mapsto & x' & = & x & + & \epsilon\xi \\ \phi(x) & \mapsto & \phi'(x') & = & \phi(x) & + & \epsilon\partial_\mu\phi(X)\xi^\mu + \epsilon G(\phi(x)) \\ & & & =: & \phi & + & \delta\phi \end{array}$$

que deje invariante la acción S, es decir, que

$$X.L := \epsilon\delta(L) := L' d^D x' - L d^D x = \epsilon d\eta$$

II. Invarianzas: Teorema de Noether

Para cada transformación infinitesimal

$$\begin{array}{ccccccc} x & \mapsto & x' & = & x & + & \epsilon\xi \\ \phi(x) & \mapsto & \phi'(x') & = & \phi(x) & + & \epsilon\partial_\mu\phi(X)\xi^\mu + \epsilon G(\phi(x)) \\ & & & =: & \phi & + & \delta\phi \end{array}$$

que deje invariante la acción S, es decir, que

$$X.L := \epsilon\delta(L) := L' d^D x' - L d^D x = \epsilon d\eta$$

se tiene asociada una corriente

$$j^\mu = L\xi^\mu - \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}}\delta\phi + \eta^\mu$$

II. Invarianzas: Teorema de Noether

Para cada transformación infinitesimal

$$\begin{array}{ccccccc} x & \mapsto & x' & = & x & + & \epsilon\xi \\ \phi(x) & \mapsto & \phi'(x') & = & \phi(x) & + & \epsilon\partial_\mu\phi(X)\xi^\mu + \epsilon G(\phi(x)) \\ & & & =: & \phi & + & \delta\phi \end{array}$$

que deje invariante la acción S, es decir, que

$$X.L := \epsilon\delta(L) := L'd^Dx' - Ld^Dx = \epsilon d\eta$$

se tiene asociada una corriente

$$j^\mu = L\xi^\mu - \frac{\partial L}{\partial\phi_{,\mu}}\delta\phi + \eta^\mu$$

que verifica

$$\partial_\mu j^\mu \equiv 0$$

II. Invarianzas: Teorema de Noether

Para cada transformación infinitesimal

$$\begin{array}{ccccccc} x & \mapsto & x' & = & x & + & \epsilon\xi \\ \phi(x) & \mapsto & \phi'(x') & = & \phi(x) & + & \epsilon\partial_\mu\phi(X)\xi^\mu + \epsilon G(\phi(x)) \\ & & & =: & \phi & + & \delta\phi \end{array}$$

que deje invariante la acción S, es decir, que

$$X.L := \epsilon\delta(L) := L' d^D x' - L d^D x = \epsilon d\eta$$

se tiene asociada una corriente

$$j^\mu = L\xi^\mu - \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}}\delta\phi + \eta^\mu$$

que verifica

$$\partial_\mu j^\mu \equiv 0$$

y en consecuencia, $Q := \int d^{D-1} j^0$ verifica

II. Invarianzas: Teorema de Noether

Para cada transformación infinitesimal

$$\begin{array}{ccccccc} x & \mapsto & x' & = & x & + & \epsilon\xi \\ \phi(x) & \mapsto & \phi'(x') & = & \phi(x) & + & \epsilon\partial_\mu\phi(X)\xi^\mu + \epsilon G(\phi(x)) \\ & & & =: & \phi & + & \delta\phi \end{array}$$

que deje invariante la acción S, es decir, que

$$X.L := \epsilon\delta(L) := L'd^Dx' - Ld^Dx = \epsilon d\eta$$

se tiene asociada una corriente

$$j^\mu = L\xi^\mu - \frac{\partial L}{\partial\phi_{,\mu}}\delta\phi + \eta^\mu$$

que verifica

$$\partial_\mu j^\mu \equiv 0$$

y en consecuencia, $Q := \int d^{D-1}j^0$ verifica

$$\frac{d}{dt}Q = 0$$

II. Invarianzas: Teorema de Noether - Ejemplos

II. Invarianzas: Teorema de Noether - Ejemplos

Invarianza en el tiempo

II. Invarianzas: Teorema de Noether - Ejemplos

Invarianza en el tiempo

Si $L(\phi, \partial\phi, x)$ no depende explícitamente del tiempo, entonces la traslación $t \mapsto t + \epsilon$, $x^i \mapsto x^i$, $\phi(x) \mapsto \phi'(x') = \phi(t + \epsilon, x^i)$ deja L invariante.

II. Invarianzas: Teorema de Noether - Ejemplos

Invarianza en el tiempo

Si $L(\phi, \partial\phi, x)$ no depende explícitamente del tiempo, entonces la traslación $t \mapsto t + \epsilon$, $x^i \mapsto x^i$, $\phi(x) \mapsto \phi'(x') = \phi(t + \epsilon, x^i)$ deja L invariante.

Tenemos

$$j^\mu = L\xi^\mu - \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} \delta\phi$$

II. Invarianzas: Teorema de Noether - Ejemplos

Invarianza en el tiempo

Si $L(\phi, \partial\phi, x)$ no depende explícitamente del tiempo, entonces la traslación $t \mapsto t + \epsilon$, $x^i \mapsto x^i$, $\phi(x) \mapsto \phi'(x') = \phi(t + \epsilon, x^i)$ deja L invariante.

Tenemos

$$j^\mu = L\xi^\mu - \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} \delta\phi$$

y en este caso

$$\xi^\mu = (1, 0, \ldots, 0)$$

$$\delta\phi = \phi'(x') - \phi(x) = \partial_t \phi = \partial_0 \phi = \phi_{,0}$$

II. Invarianzas: Teorema de Noether - Ejemplos

Invarianza en el tiempo

Si $L(\phi, \partial\phi, x)$ no depende explícitamente del tiempo, entonces la traslación $t \mapsto t + \epsilon$, $x^i \mapsto x^i$, $\phi(x) \mapsto \phi'(x') = \phi(t + \epsilon, x^i)$ deja L invariante.

Tenemos

$$j^\mu = L\xi^\mu - \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} \delta\phi$$

y en este caso

$$\xi^\mu = (1, 0, \ldots, 0)$$

$$\delta\phi = \phi'(x') - \phi(x) = \partial_t \phi = \partial_0 \phi = \phi_{,0}$$

Por lo tanto

$$j^0 = L - \frac{\partial L}{\partial \phi_{,0}} \phi_{,0} =: H$$

Se denomina el Hamiltoniano.

II. Invarianzas: Teorema de Noether - Ejemplos

Invarianza en el tiempo

Si $L(\phi, \partial\phi, x)$ no depende explícitamente del tiempo, entonces la traslación $t \mapsto t + \epsilon$, $x^i \mapsto x^i$, $\phi(x) \mapsto \phi'(x') = \phi(t + \epsilon, x^i)$ deja L invariante.

Tenemos

$$j^\mu = L\xi^\mu - \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} \delta\phi$$

y en este caso

$$\xi^\mu = (1, 0, \ldots, 0)$$

$$\delta\phi = \phi'(x') - \phi(x) = \partial_t \phi = \partial_0 \phi = \phi_{,0}$$

Por lo tanto

$$j^0 = L - \frac{\partial L}{\partial \phi_{,0}} \phi_{,0} =: H$$

Se denomina el Hamiltoniano. En mecánica cuántica, H regirá la evolución temporal.

II. Invarianzas: Teorema de Noether - el Hamiltoniano

Campo escalar:

II. Invarianzas: Teorema de Noether - el Hamiltoniano

Campo escalar: $L = \frac{1}{2}(m\phi + \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi)$,

II. Invarianzas: Teorema de Noether - el Hamiltoniano

Campo escalar: $L = \frac{1}{2}(m\phi + \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi)$,

$$H = L - \frac{\partial L}{\partial \phi_{,0}}\phi_{,0}$$

II. Invarianzas: Teorema de Noether - el Hamiltoniano

Campo escalar: $L = \frac{1}{2}(m\phi + \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi)$,

$$H = L - \frac{\partial L}{\partial \phi_{,0}}\phi_{,0}$$

$$= \frac{1}{2}(m\phi^2 - (\partial_0\phi)^2 + (\partial_i\phi)^2) + \partial_0\phi\partial_0\phi$$

II. Invarianzas: Teorema de Noether - el Hamiltoniano

Campo escalar: $L = \frac{1}{2}(m\phi + \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi)$,

$$H = L - \frac{\partial L}{\partial \phi_{,0}}\phi_{,0}$$

$$= \frac{1}{2}(m\phi^2 + (\partial_0\phi)^2 + (\partial_i\phi)^2)$$

III. Grupo conforme

III. Grupo conforme

$$M = \mathbb{R}^D = \mathbb{R}^{1,D-1} = (\mathbb{R}^D, (-, + \cdots, +)).$$

III. Grupo conforme

$M = \mathbb{R}^D = \mathbb{R}^{1,D-1} = (\mathbb{R}^D, (-, + \cdots, +))$.
Consideramos $f : M \to M$ difeomorfismo que preservan ángulo,

III. Grupo conforme

$M = \mathbb{R}^D = \mathbb{R}^{1,D-1} = (\mathbb{R}^D, (-, + \cdots, +))$.
Consideramos $f : M \to M$ difeomorfismo que preservan ángulo, es decir, si $v, w \in T_pM$,

$$\langle f_*(v), f_*(w) \rangle = e^{\Omega(p)} \langle v, w \rangle$$

III. Grupo conforme

$M = \mathbb{R}^D = \mathbb{R}^{1,D-1} = (\mathbb{R}^D, (-, + \cdots, +))$.
Consideramos $f : M \to M$ difeomorfismo que preservan ángulo, es decir, si $v, w \in T_pM$,

$$\langle f_*(v), f_*(w) \rangle = e^{\Omega(p)} \langle v, w \rangle$$

Por ejemplo, si f es una rotación, o una traslación,

III. Grupo conforme

$M = \mathbb{R}^D = \mathbb{R}^{1,D-1} = (\mathbb{R}^D, (-, + \cdots, +))$.
Consideramos $f : M \to M$ difeomorfismo que preservan ángulo, es decir, si $v, w \in T_pM$,

$$\langle f_*(v), f_*(w) \rangle = e^{\Omega(p)} \langle v, w \rangle$$

Por ejemplo, si f es una rotación, o una traslación, pero tambien si f es una dilatación: $f(p) = \lambda p$.

III. Grupo conforme

$M = \mathbb{R}^D = \mathbb{R}^{1,D-1} = (\mathbb{R}^D, (-, + \cdots, +))$.
Consideramos $f : M \to M$ difeomorfismo que preservan ángulo, es decir, si $v, w \in T_p M$,

$$\langle f_*(v), f_*(w) \rangle = e^{\Omega(p)} \langle v, w \rangle$$

Por ejemplo, si f es una rotación, o una traslación, pero tambien si f es una dilatación: $f(p) = \lambda p$. Y hay mas.

III. Grupo conforme

La condición de ser conforme, dice que la matriz del diferencial de f debe ser la matriz de una isometría, a menos de un factor global.

III. Grupo conforme

La condición de ser conforme, dice que la matriz del diferencial de f debe ser la matriz de una isometría, a menos de un factor global. Por ejemplo, en dimensión dos, con la métrica $(+,+)$,

$$Df_p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $(a,b) \perp (c,d)$, y $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$,

III. Grupo conforme

La condición de ser conforme, dice que la matriz del diferencial de f debe ser la matriz de una isometría, a menos de un factor global. Por ejemplo, en dimensión dos, con la métrica $(+,+)$,

$$Df_p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $(a,b) \perp (c,d)$, y $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, es decir, de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, o $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

III. Grupo conforme

La condición de ser conforme, dice que la matriz del diferencial de f debe ser la matriz de una isometría, a menos de un factor global. Por ejemplo, en dimensión dos, con la métrica $(+,+)$,

$$Df_p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $(a,b) \perp (c,d)$, y $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, es decir, de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, o $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Si escribimos

$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$$

entonces $a = u_x$, $b = u_y$, $c = v_x$, $d = v_y$,

III. Grupo conforme

La condición de ser conforme, dice que la matriz del diferencial de f debe ser la matriz de una isometría, a menos de un factor global. Por ejemplo, en dimensión dos, con la métrica $(+,+)$,

$$Df_p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $(a,b) \perp (c,d)$, y $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, es decir, de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, o $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Si escribimos

$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$$

entonces $a = u_x$, $b = u_y$, $c = v_x$, $d = v_y$, las condifciones $a = d$ y $b = -c$ son las ecuaciones de Cauchy-Riemann, o sea que f es holomorfa,

III. Grupo conforme

La condición de ser conforme, dice que la matriz del diferencial de f debe ser la matriz de una isometría, a menos de un factor global. Por ejemplo, en dimensión dos, con la métrica $(+,+)$,

$$Df_p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $(a,b) \perp (c,d)$, y $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, es decir, de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, o $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Si escribimos

$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$$

entonces $a = u_x$, $b = u_y$, $c = v_x$, $d = v_y$, las condifciones $a = d$ y $b = -c$ son las ecuaciones de Cauchy-Riemann, o sea que f es holomorfa, y en el segundo caso f es una función antiholomorfa (holomorfa en $\overline{z}$).

III. Grupo conforme

La condición de ser conforme, dice que la matriz del diferencial de f debe ser la matriz de una isometría, a menos de un factor global. Por ejemplo, en dimensión dos, con la métrica $(+,+)$,

$$Df_p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $(a,b) \perp (c,d)$, y $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, es decir, de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, o $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Si escribimos

$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$$

entonces $a = u_x$, $b = u_y$, $c = v_x$, $d = v_y$, las condifciones $a = d$ y $b = -c$ son las ecuaciones de Cauchy-Riemann, o sea que f es holomorfa, y en el segundo caso f es una función antiholomorfa (holomorfa en $\overline{z}$).

Si f es entera, entonces $f(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

III. Grupo conforme

La condición de ser conforme, dice que la matriz del diferencial de f debe ser la matriz de una isometría, a menos de un factor global. Por ejemplo, en dimensión dos, con la métrica $(+,+)$,

$$Df_p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $(a,b) \perp (c,d)$, y $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, es decir, de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, o $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Si escribimos

$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$$

entonces $a = u_x$, $b = u_y$, $c = v_x$, $d = v_y$, las condifciones $a = d$ y $b = -c$ son las ecuaciones de Cauchy-Riemann, o sea que f es holomorfa, y en el segundo caso f es una función antiholomorfa (holomorfa en $\overline{z}$).

Si f es entera, entonces $f(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Si permitimos polos,

III. Grupo conforme

La condición de ser conforme, dice que la matriz del diferencial de f debe ser la matriz de una isometría, a menos de un factor global. Por ejemplo, en dimensión dos, con la métrica $(+,+)$,

$$Df_p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $(a,b) \perp (c,d)$, y $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, es decir, de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, o $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Si escribimos

$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$$

entonces $a = u_x$, $b = u_y$, $c = v_x$, $d = v_y$, las condifciones $a = d$ y $b = -c$ son las ecuaciones de Cauchy-Riemann, o sea que f es holomorfa, y en el segundo caso f es una función antiholomorfa (holomorfa en $\overline{z}$).

Si f es entera, entonces $f(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Si permitimos polos, $f : S^2 \to S^2$,

III. Grupo conforme

La condición de ser conforme, dice que la matriz del diferencial de f debe ser la matriz de una isometría, a menos de un factor global. Por ejemplo, en dimensión dos, con la métrica $(+,+)$,

$$Df_p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $(a,b) \perp (c,d)$, y $a^2+b^2 = c^2+d^2$, es decir, de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, o $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Si escribimos

$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$$

entonces $a = u_x$, $b = u_y$, $c = v_x$, $d = v_y$, las condifciones $a = d$ y $b = -c$ son las ecuaciones de Cauchy-Riemann, o sea que f es holomorfa, y en el segundo caso f es una función antiholomorfa (holomorfa en $\overline{z}$).

Si f es entera, entonces $f(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Si permitimos polos, $f : S^2 \to S^2$, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$,

III. Grupo conforme

La condición de ser conforme, dice que la matriz del diferencial de f debe ser la matriz de una isometría, a menos de un factor global. Por ejemplo, en dimensión dos, con la métrica $(+,+)$,

$$Df_p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $(a,b) \perp (c,d)$, y $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, es decir, de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, o $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Si escribimos

$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$$

entonces $a = u_x$, $b = u_y$, $c = v_x$, $d = v_y$, las condifciones $a = d$ y $b = -c$ son las ecuaciones de Cauchy-Riemann, o sea que f es holomorfa, y en el segundo caso f es una función antiholomorfa (holomorfa en $\overline{z}$).

Si f es entera, entonces $f(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Si permitimos polos, $f : S^2 \to S^2$, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, el grupo conforme (global) es $PSL(2, \mathbb{C})$.

III. Grupo conforme

La condición de ser conforme, dice que la matriz del diferencial de f debe ser la matriz de una isometría, a menos de un factor global. Por ejemplo, en dimensión dos, con la métrica $(+,+)$,

$$Df_p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $(a,b) \perp (c,d)$, y $a^2+b^2 = c^2+d^2$, es decir, de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, o $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Si escribimos

$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$$

entonces $a = u_x$, $b = u_y$, $c = v_x$, $d = v_y$, las condifciones $a = d$ y $b = -c$ son las ecuaciones de Cauchy-Riemann, o sea que f es holomorfa, y en el segundo caso f es una función antiholomorfa (holomorfa en $\overline{z}$).

Si f es entera, entonces $f(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Si permitimos polos, $f : S^2 \to S^2$, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, el grupo conforme (global) es $PSL(2,\mathbb{C})$.

Pero si consideramos transformaciones conformes *infinitesimales*, entonces el álgebra de Lie conforme (en dimensión dos) tiene dimensión infinita!

III. Álgebra de Lie conforme

III. Álgebra de Lie conforme

Consideramos una transformación $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon\xi^\mu(x)$

III. Álgebra de Lie conforme

Consideramos una transformación $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon\xi^\mu(x)$ y requerimos

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) = (1 + \epsilon f(x)) g_{\mu\nu}(x)$$

a primer orden en ϵ.

III. Álgebra de Lie conforme

Consideramos una transformación $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon\xi^\mu(x)$ y requerimos

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x) = (1+\epsilon f(x))g_{\mu\nu}(x)$$

a primer orden en ϵ. La condición resultante, para $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ la métrica Riemaniana standard de $\mathbb{R}^D$ es

$$\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu = f(x)\delta_{\mu\nu} \quad (1)$$

III. Álgebra de Lie conforme

Consideramos una transformación $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x)$ y requerimos

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) = (1 + \epsilon f(x)) g_{\mu\nu}(x)$$

a primer orden en ϵ. La condición resultante, para $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ la métrica Riemaniana standard de $\mathbb{R}^D$ es

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = f(x) \delta_{\mu\nu} \ (1)$$

Tomando traza, obtenemos el factor f como

III. Álgebra de Lie conforme

Consideramos una transformación $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x)$ y requerimos

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) = (1 + \epsilon f(x)) g_{\mu\nu}(x)$$

a primer orden en ϵ. La condición resultante, para $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ la métrica Riemaniana standard de $\mathbb{R}^D$ es

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = f(x) \delta_{\mu\nu} \ (1)$$

$$2\partial_\mu \xi^\mu = f\ D$$

III. Álgebra de Lie conforme

Consideramos una transformación $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon\xi^\mu(x)$ y requerimos

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x) = (1 + \epsilon f(x))g_{\mu\nu}(x)$$

a primer orden en ϵ. La condición resultante, para $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ la métrica Riemaniana standard de $\mathbb{R}^D$ es

$$\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu = f(x)\delta_{\mu\nu} \ (1)$$

$$2\partial_\mu\xi^\mu = f\ D$$

Derivando la ecuacion (1), permutando indices, y sumando y restando se obtiene

III. Álgebra de Lie conforme

Consideramos una transformación $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x)$ y requerimos

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) = (1 + \epsilon f(x)) g_{\mu\nu}(x)$$

a primer orden en ϵ. La condición resultante, para $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ la métrica Riemaniana standard de $\mathbb{R}^D$ es

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = f(x) \delta_{\mu\nu} \ (1)$$

$$2\partial_\mu \xi^\mu = f\ D$$

$$2\partial_\mu \partial_\nu \xi_\rho = \delta_{\mu\rho} \partial_\nu f + \delta_{\nu\rho} \partial_\mu f - \delta_{\mu\nu} \partial_\rho f \ (2)$$

III. Álgebra de Lie conforme

Consideramos una transformación $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon\xi^\mu(x)$ y requerimos

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) = (1 + \epsilon f(x)) g_{\mu\nu}(x)$$

a primer orden en ϵ. La condición resultante, para $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ la métrica Riemaniana standard de $\mathbb{R}^D$ es

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = f(x) \delta_{\mu\nu} \ (1)$$

$$2\partial_\mu \xi^\mu = f \ D$$

$$2\partial_\mu \partial_\nu \xi_\rho = \delta_{\mu\rho}\partial_\nu f + \delta_{\nu\rho}\partial_\mu f - \delta_{\mu\nu}\partial_\rho f \ (2)$$

tomando traza tenemos

III. Álgebra de Lie conforme

Consideramos una transformación $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon\xi^\mu(x)$ y requerimos

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x) = (1+\epsilon f(x))g_{\mu\nu}(x)$$

a primer orden en ϵ. La condición resultante, para $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ la métrica Riemaniana standard de $\mathbb{R}^D$ es

$$\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu = f(x)\delta_{\mu\nu} \ (1)$$

$$2\partial_\mu\xi^\mu = f\ D$$

$$2\partial_\mu\partial_\nu\xi_\rho = \delta_{\mu\rho}\partial_\nu f + \delta_{\nu\rho}\partial_\mu f - \delta_{\mu\nu}\partial_\rho f \ (2)$$

$$2\partial^2\xi_\rho = (2-D)\partial_\rho f$$

III. Álgebra de Lie conforme

Consideramos una transformación $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon\xi^\mu(x)$ y requerimos

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x) = (1 + \epsilon f(x))g_{\mu\nu}(x)$$

a primer orden en ϵ. La condición resultante, para $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ la métrica Riemaniana standard de $\mathbb{R}^D$ es

$$\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu = f(x)\delta_{\mu\nu} \ (1)$$

$$2\partial_\mu\xi^\mu = f\ D$$

$$2\partial_\mu\partial_\nu\xi_\rho = \delta_{\mu\rho}\partial_\nu f + \delta_{\nu\rho}\partial_\mu f - \delta_{\mu\nu}\partial_\rho f \ (2)$$

$$2\partial^2\xi_\rho = (2 - D)\partial_\rho f$$

Aplicando ∂^2 en (1) y ∂_ν en la expresion anterior y comparando, tenemos

III. Álgebra de Lie conforme

Consideramos una transformación $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon\xi^\mu(x)$ y requerimos

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) = (1 + \epsilon f(x)) g_{\mu\nu}(x)$$

a primer orden en ϵ. La condición resultante, para $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ la métrica Riemaniana standard de $\mathbb{R}^D$ es

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = f(x)\delta_{\mu\nu} \ (1)$$

$$2\partial_\mu \xi^\mu = f\ D$$

$$2\partial_\mu\partial_\nu\xi_\rho = \delta_{\mu\rho}\partial_\nu f + \delta_{\nu\rho}\partial_\mu f - \delta_{\mu\nu}\partial_\rho f \ (2)$$

$$2\partial^2\xi_\rho = (2 - D)\partial_\rho f$$

$$(2 - D)\partial_\mu\partial_\nu f = \delta_{\mu\nu}\partial^2 f$$

III. Álgebra de Lie conforme

Consideramos una transformación $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon\xi^\mu(x)$ y requerimos

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) = (1 + \epsilon f(x)) g_{\mu\nu}(x)$$

a primer orden en ϵ. La condición resultante, para $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ la métrica Riemaniana standard de $\mathbb{R}^D$ es

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = f(x)\delta_{\mu\nu} \ (1)$$

$$2\partial_\mu \xi^\mu = f \ D$$

$$2\partial_\mu \partial_\nu \xi_\rho = \delta_{\mu\rho}\partial_\nu f + \delta_{\nu\rho}\partial_\mu f - \delta_{\mu\nu}\partial_\rho f \ (2)$$

$$2\partial^2 \xi_\rho = (2 - D)\partial_\rho f$$

$$(2 - D)\partial_\mu \partial_\nu f = \delta_{\mu\nu}\partial^2 f$$

Aquí vemos cómo el caso $D = 2$ debe ser considerado aparte.

III. Álgebra de Lie conforme en $D \geq 3$

III. Álgebra de Lie conforme en $D \geq 3$

Las ecuaciones $(D-1)\partial^2 f = 0$ y $(2-D)\partial_\mu \partial_\nu f = \delta_{\mu\nu}\partial^2 f$ implican

III. Álgebra de Lie conforme en $D \geq 3$

Las ecuaciones $(D-1)\partial^2 f = 0$ y $(2-D)\partial_\mu \partial_\nu f = \delta_{\mu\nu}\partial^2 f$ implican $\partial_\mu \partial_\nu f = 0$

III. Álgebra de Lie conforme en $D \geq 3$

Las ecuaciones $(D-1)\partial^2 f = 0$ y $(2-D)\partial_\mu\partial_\nu f = \delta_{\mu\nu}\partial^2 f$ implican $\partial_\mu\partial_\nu f = 0$, es decir,

III. Álgebra de Lie conforme en $D \geq 3$

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu$$

III. Álgebra de Lie conforme en $D \geq 3$

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu$$

Sustituyendo en la ecuación $2\partial_\mu \partial_\nu \xi_\rho = \delta_{\mu\rho}\partial_\nu f + \delta_{\nu\rho}\partial_\mu f - \delta_{\mu\nu}\partial_\rho f$ vemos que $\partial_\mu \partial_\nu \xi_\rho$ es constante,

III. Álgebra de Lie conforme en $D \geq 3$

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu$$

Sustituyendo en la ecuación $2\partial_\mu\partial_\nu\xi_\rho = \delta_{\mu\rho}\partial_\nu f + \delta_{\nu\rho}\partial_\mu f - \delta_{\mu\nu}\partial_\rho f$ vemos que $\partial_\mu\partial_\nu\xi_\rho$ es constante, luego

III. Álgebra de Lie conforme en $D \geq 3$

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu$$

$$\xi_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho$$

III. Álgebra de Lie conforme en $D \geq 3$

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu$$

$$\xi_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho$$

donde podemos elegir $c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu}$.

III. Álgebra de Lie conforme en $D \geq 3$

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu$$

$$\xi_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho$$

No hay restricciones en los a_μ, por lo tanto son D parámetros libres (corresponden a las traslaciones).

III. Álgebra de Lie conforme en $D \geq 3$

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu$$

$$\xi_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho$$

La parte lineal satisface

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = b^\lambda_\lambda \delta_{\mu\nu}$$

III. Álgebra de Lie conforme en $D \geq 3$

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu$$

$$\xi_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho$$

La parte lineal satisface

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = b_\lambda^\lambda \delta_{\mu\nu}$$

Esto corresponde a que $b_{\mu\nu}$ sea la suma de una matriz antisimetrica (rotaciones, $D(D-1)/2$ parámetros) mas un múltiplo de la identidad (dilataciones, 1 parámetro más).

III. Álgebra de Lie conforme en $D \geq 3$

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu$$

$$\xi_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho$$

Para la parte cuadrática, usamos la ecuacion con derivadas segundas de ξ, y tenemos

III. Álgebra de Lie conforme en $D \geq 3$

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu$$

$$\xi_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho$$

$$c_{\mu\nu\rho} = \delta_{\mu\rho} b_\nu + \delta_{\mu\nu} b_\rho - \delta_{\nu\rho} b_\mu$$

donde $b_\mu = \frac{1}{D} c^\sigma_{\sigma\mu}$.

III. Álgebra de Lie conforme en $D \geq 3$

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu$$

$$\xi_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho$$

$$c_{\mu\nu\rho} = \delta_{\mu\rho} b_\nu + \delta_{\mu\nu} b_\rho - \delta_{\nu\rho} b_\mu$$

donde $b_\mu = \frac{1}{D} c^\sigma_{\sigma\mu}$. La correspondiente transformación infinitesimal es

$$x'^\mu = x^\mu + 2(x \cdot b) x^\mu - b^\mu x^2$$

Denominada Transformación conforme especial (SCT),

III. Álgebra de Lie conforme en $D \geq 3$

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu$$

$$\xi_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho$$

$$c_{\mu\nu\rho} = \delta_{\mu\rho} b_\nu + \delta_{\mu\nu} b_\rho - \delta_{\nu\rho} b_\mu$$

donde $b_\mu = \frac{1}{D} c^\sigma_{\sigma\mu}$. La correspondiente transformación infinitesimal es

$$x'^\mu = x^\mu + 2(x \cdot b) x^\mu - b^\mu x^2$$

Denominada Transformación conforme especial (SCT), tenemos aqui D parametros.

III. Álgebra de Lie conforme en $D \geq 3$

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu$$

$$\xi_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho$$

En total, la dimension del algebra de Lie conforme es $D + D(D-1)/2 + 1 + D = D(D+1)/2 + (D+1)$.

III. Álgebra de Lie conforme en $D \geq 3$

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu$$

$$\xi_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho$$

En total, la dimension del algebra de Lie conforme es $D + D(D-1)/2 + 1 + D = D(D+1)/2 + (D+1)$.

Se puede mostrar que el álgebra de Lie conforme en dimensión $D \geq 3$ (para la métrica Lorenziana) es $\mathfrak{so}(D, 2)$.
En vez de $\mathfrak{so}(D-1, 1)$, si se consideraran las isometrias nada mas.

III. Álgebra de Lie conforme en $D = 2$

III. Álgebra de Lie conforme en $D = 2$

$$z \mapsto X(z) = z + \epsilon f(z)$$

con $\epsilon^2 = 0$,

III. Álgebra de Lie conforme en $D = 2$

$$z \mapsto X(z) = z + \epsilon f(z)$$

con $\epsilon^2 = 0$, entonces f es holomorfa.

III. Álgebra de Lie conforme en $D = 2$

$$z \mapsto X(z) = z + \epsilon f(z)$$

con $\epsilon^2 = 0$, entonces f es holomorfa.
El corchete de Lie de $X(z) = z + \epsilon f(z)$ e $Y(z) = z + \epsilon g(z)$:

$$[X, Y](z) = Y(X(z)) - X(Y(z)) = Y(z + \epsilon f(z)) - X(z + \epsilon g(z))$$

III. Álgebra de Lie conforme en $D = 2$

$$z \mapsto X(z) = z + \epsilon f(z)$$

con $\epsilon^2 = 0$, entonces f es holomorfa.
El corchete de Lie de $X(z) = z + \epsilon f(z)$ e $Y(z) = z + \epsilon g(z)$:

$$[X, Y](z) = Y(X(z)) - X(Y(z)) = Y(z + \epsilon f(z)) - X(z + \epsilon g(z))$$

a segundo orden en ϵ es

III. Álgebra de Lie conforme en $D = 2$

$$z \mapsto X(z) = z + \epsilon f(z)$$

con $\epsilon^2 = 0$, entonces f es holomorfa.
El corchete de Lie de $X(z) = z + \epsilon f(z)$ e $Y(z) = z + \epsilon g(z)$:

$$[X, Y](z) = Y(X(z)) - X(Y(z)) = Y(z + \epsilon f(z)) - X(z + \epsilon g(z))$$

a segundo orden en ϵ es

$$= z + \epsilon f(z) + \epsilon(g(z + \epsilon f(z)) - (z + \epsilon g(z)) - \epsilon f(z + \epsilon g(z))$$

III. Álgebra de Lie conforme en $D = 2$

$$z \mapsto X(z) = z + \epsilon f(z)$$

con $\epsilon^2 = 0$, entonces f es holomorfa.
El corchete de Lie de $X(z) = z + \epsilon f(z)$ e $Y(z) = z + \epsilon g(z)$:

$$[X, Y](z) = Y(X(z)) - X(Y(z)) = Y(z + \epsilon f(z)) - X(z + \epsilon g(z))$$

a segundo orden en ϵ es

$$= z + \epsilon f(z) + \epsilon g(z) + \epsilon^2 g'(z) f(z) - (z + \epsilon g(z)) - \epsilon f(z) - \epsilon^2 f'(z) g(z)$$

III. Álgebra de Lie conforme en $D = 2$

$$z \mapsto X(z) = z + \epsilon f(z)$$

con $\epsilon^2 = 0$, entonces f es holomorfa.
El corchete de Lie de $X(z) = z + \epsilon f(z)$ e $Y(z) = z + \epsilon g(z)$:

$$[X, Y](z) = Y(X(z)) - X(Y(z)) = Y(z + \epsilon f(z)) - X(z + \epsilon g(z))$$

a segundo orden en ϵ es

$$= \epsilon^2 (g'(z) f(z) - f'(z) g(z))$$

III. Álgebra de Lie conforme en $D = 2$

$$z \mapsto X(z) = z + \epsilon f(z)$$

con $\epsilon^2 = 0$, entonces f es holomorfa.
El corchete de Lie de $X(z) = z + \epsilon f(z)$ e $Y(z) = z + \epsilon g(z)$:

$$[X, Y](z) = Y(X(z)) - X(Y(z)) = Y(z + \epsilon f(z)) - X(z + \epsilon g(z))$$

a segundo orden en ϵ es

$$= \epsilon^2 (g'(z) f(z) - f'(z) g(z))$$

Si ℓ_n corresponde a $f(z) = z^{n+1}$, entonces

$$[\ell_n, \ell_m] = (z^{n+1})' z^{m+1} - (z^{m+1})' z^{n+1} = (n - m) z^{n+m+1} = (n - m) \ell_{n+m}$$

III. Álgebra de Lie conforme en $D = 2$

$$z \mapsto X(z) = z + \epsilon f(z)$$

con $\epsilon^2 = 0$, entonces f es holomorfa.
El corchete de Lie de $X(z) = z + \epsilon f(z)$ e $Y(z) = z + \epsilon g(z)$:

$$[X, Y](z) = Y(X(z)) - X(Y(z)) = Y(z + \epsilon f(z)) - X(z + \epsilon g(z))$$

a segundo orden en ϵ es

$$= \epsilon^2 (g'(z) f(z) - f'(z) g(z))$$

Si ℓ_n corresponde a $f(z) = z^{n+1}$, entonces

$$[\ell_n, \ell_m] = (z^{n+1})' z^{m+1} - (z^{m+1})' z^{n+1} = (n - m) z^{n+m+1} = (n - m)\ell_{n+m}$$

Podemos hacer una correspondencia $\ell_n = -z^{n+1}\partial_z$.

III. Álgebra de Lie conforme en $D = 2$

$$z \mapsto X(z) = z + \epsilon f(z)$$

con $\epsilon^2 = 0$, entonces f es holomorfa.
El corchete de Lie de $X(z) = z + \epsilon f(z)$ e $Y(z) = z + \epsilon g(z)$:

$$[X, Y](z) = Y(X(z)) - X(Y(z)) = Y(z + \epsilon f(z)) - X(z + \epsilon g(z))$$

a segundo orden en ϵ es

$$= \epsilon^2 (g'(z)f(z) - f'(z)g(z))$$

Si ℓ_n corresponde a $f(z) = z^{n+1}$, entonces

$$[\ell_n, \ell_m] = (z^{n+1})' z^{m+1} - (z^{m+1})' z^{n+1} = (n - m) z^{n+m+1} = (n - m)\ell_{n+m}$$

Podemos hacer una correspondencia $\ell_n = -z^{n+1}\partial_z$. Este álgebra de Lie es el álgebra de Lie $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$.

III. Álgebra de Virasoro W_2

El álgebra de Virasoro es una extensión central de

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[z, z^{-}1]) = \mathbb{C}[z, z^{-}1]\partial_z = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \ell_n \mathbb{C}$$

III. Álgebra de Virasoro W_2

El álgebra de Virasoro es una extensión central de

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[z, z^-1]) = \mathbb{C}[z, z^-1]\partial_z = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \ell_n\mathbb{C}$$

es por definición, el álgebra generada por $\{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y un elemento central c, con los corchetes

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(m^2 - m)\delta_{m,-n}$$

III. Álgebra de Virasoro W_2

El álgebra de Virasoro es una extensión central de

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[z, z^{-}1]) = \mathbb{C}[z, z^{-}1]\partial_z = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n \mathbb{C}$$

es por definición, el álgebra generada por $\{L_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y un elemento central c, con los corchetes

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(m^2 - m)\delta_{m,-n}$$

El subespacio generado por L_0, $L_{\pm 1}$ es una subálgebra de Lie, isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$.

IV. Teorías de Campos Cuánticas

IV. Teorías de Campos Cuánticas

$\phi : M \to V$ un campo,

IV. Teorías de Campos Cuánticas

$\phi : M \to V$ un campo, L el Lagrangiano.

IV. Teorías de Campos Cuánticas

$\phi : M \to V$ un campo, L el Lagrangiano.
La teoría cuántica asociada a este campo y su Lagrangiano, o la cuantización de este campo clásico, es un procedimiento que finaliza en los siguientes datos:

IV. Teorías de Campos Cuánticas

$\phi : M \to V$ un campo, L el Lagrangiano.
La teoría cuántica asociada a este campo y su Lagrangiano, o la cuantización de este campo clásico, es un procedimiento que finaliza en los siguientes datos:

- Un espacio vectorial complejo de estados $\mathcal{H}$ con una forma (sesqui)lineal definida positiva, llamado espacio de Fock.

IV. Teorías de Campos Cuánticas

$\phi : M \to V$ un campo, L el Lagrangiano.
La teoría cuántica asociada a este campo y su Lagrangiano, o la cuantización de este campo clásico, es un procedimiento que finaliza en los siguientes datos:

- Un espacio vectorial complejo de estados $\mathcal{H}$ con una forma (sesqui)lineal definida positiva, llamado espacio de Fock.
- Un álgebra A (no conmutativa) de operadores con involución, en donde están los operadores correspondientes a las magnitudes físicas a medir (energía, momento angular, posición, el campo ϕ, masa, spin, etc), que actúa en $\mathcal{H}$.

IV. Teorías de Campos Cuánticas

$\phi : M \to V$ un campo, L el Lagrangiano.
La teoría cuántica asociada a este campo y su Lagrangiano, o la cuantización de este campo clásico, es un procedimiento que finaliza en los siguientes datos:

- Un espacio vectorial complejo de estados $\mathcal{H}$ con una forma (sesqui)lineal definida positiva, llamado espacio de Fock.
- Un álgebra A (no conmutativa) de operadores con involución, en donde están los operadores correspondientes a las magnitudes físicas a medir (energía, momento angular, posición, el campo ϕ, masa, spin, etc), que actúa en $\mathcal{H}$.
- Un estado de mínima energía, denotado $|0\rangle$, llamado vacío, que genera $\mathcal{H}$ como A-módulo.

IV. Teorías de Campos Cuánticas

$\phi : M \to V$ un campo, L el Lagrangiano.
La teoría cuántica asociada a este campo y su Lagrangiano, o la cuantización de este campo clásico, es un procedimiento que finaliza en los siguientes datos:

- Un espacio vectorial complejo de estados $\mathcal{H}$ con una forma (sesqui)lineal definida positiva, llamado espacio de Fock.
- Un álgebra A (no conmutativa) de operadores con involución, en donde están los operadores correspondientes a las magnitudes físicas a medir (energía, momento angular, posición, el campo ϕ, masa, spin, etc), que actúa en $\mathcal{H}$.
- Un estado de mínima energía, denotado $|0\rangle$, llamado vacío, que genera $\mathcal{H}$ como A-módulo.
- Una descomposición triangular de A, describiendo a A en generadores a_λ y $a_\lambda^\dagger = a_\lambda^*$ llamados respectivamente operadores de aniquilación y de creación, que verifican $a_\lambda|0\rangle = 0 \ \forall\lambda$.

IV. Teorías de Campos Cuánticas

$\phi : M \to V$ un campo, L el Lagrangiano.
La teoría cuántica asociada a este campo y su Lagrangiano, o la cuantización de este campo clásico, es un procedimiento que finaliza en los siguientes datos:

- Un espacio vectorial complejo de estados $\mathcal{H}$ con una forma (sesqui)lineal definida positiva, llamado espacio de Fock.
- Un álgebra A (no conmutativa) de operadores con involución, en donde están los operadores correspondientes a las magnitudes físicas a medir (energía, momento angular, posición, el campo ϕ, masa, spin, etc), que actúa en $\mathcal{H}$.
- Un estado de mínima energía, denotado $|0\rangle$, llamado vacío, que genera $\mathcal{H}$ como A-módulo.
- Una descomposición triangular de A, describiendo a A en generadores a_λ y $a_\lambda^\dagger = a_\lambda^*$ llamados respectivamente operadores de aniquilación y de creación, que verifican $a_\lambda|0\rangle = 0\ \forall\lambda$. Esta descomposición se interpreta como el contenido de partículas de la teoría, más precisamente, $a_\lambda^\dagger|0\rangle = |\lambda\rangle$ es el estado correspondiente a la partícula etiquetada por λ.

IV. Cuantización canónica

IV. Cuantización canónica

Un esquema de cuantización, llamado cuantización canónica, tiene las siguientes líneas:

IV. Cuantización canónica

Un esquema de cuantización, llamado cuantización canónica, tiene las siguientes líneas:

Supongamos que la ecuación diferencial es lineal, está dada por un operador diferencial $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D}\phi = 0$$

de segundo orden.

IV. Cuantización canónica

Un esquema de cuantización, llamado cuantización canónica, tiene las siguientes líneas:
Supongamos que la ecuación diferencial es lineal, está dada por un operador diferencial $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D}\phi = 0$$

de segundo orden. Por ejemplo, la ecuación de Klein - Gordon

$$\Box\phi = m^2\phi$$

IV. Cuantización canónica

Un esquema de cuantización, llamado cuantización canónica, tiene las siguientes líneas:
Supongamos que la ecuación diferencial es lineal, está dada por un operador diferencial $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D}\phi = 0$$

de segundo orden. Por ejemplo, la ecuación de Klein - Gordon

$$\Box\phi = m^2\phi$$

Supongamos que encontramos una “base” de soluciones $\phi_\lambda(x)$, parametrizadas por un índice λ, de manera tal que

$$\phi(x) = \int d\lambda a_\lambda \phi_\lambda(x)$$

IV. Cuantización canónica

Un esquema de cuantización, llamado cuantización canónica, tiene las siguientes líneas:
Supongamos que la ecuación diferencial es lineal, está dada por un operador diferencial $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D}\phi = 0$$

de segundo orden. Por ejemplo, la ecuación de Klein - Gordon

$$\Box\phi = m^2\phi$$

Supongamos que encontramos una "base" de soluciones $\phi_\lambda(x)$, parametrizadas por un índice λ, de manera tal que

$$\phi(x) = \int d\lambda a_\lambda \phi_\lambda(x)$$

Para Klein-Gordon, la transformada de Fourier da

$$\phi(x) = \int d^D k \; e^{ik\cdot x} a_\lambda$$

IV. Cuantización canónica

Un esquema de cuantización, llamado cuantización canónica, tiene las siguientes líneas:

Supongamos que la ecuación diferencial es lineal, está dada por un operador diferencial $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D}\phi = 0$$

de segundo orden. Por ejemplo, la ecuación de Klein - Gordon

$$\Box\phi = m^2\phi$$

Supongamos que encontramos una "base" de soluciones $\phi_\lambda(x)$, parametrizadas por un índice λ, de manera tal que

$$\phi(x) = \int d\lambda a_\lambda \phi_\lambda(x)$$

Para Klein-Gordon, la transformada de Fourier da

$$\phi(x) = \int d^D k \; e^{ik\cdot x} a_\lambda$$

Aquí $\phi_\lambda(x) = e^{ik\cdot x}$, y $\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ verifica

$$\lambda \cdot \lambda = -\lambda_0^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) = -m^2.$$

IV. Cuantización canónica

Se separan los λ tales que $\phi_\lambda(x)$ corresponde a energía positiva, o negativa.

IV. Cuantización canónica

Se separan los λ tales que $\phi_\lambda(x)$ corresponde a energía positiva, o negativa. En el caso $e^{i\lambda x}$, la energía es el autovalor de $i\partial_t$, luego $-\lambda_0 = E$.

IV. Cuantización canónica

Se separan los λ tales que $\phi_\lambda(x)$ corresponde a energía positiva, o negativa. En el caso $e^{i\lambda x}$, la energía es el autovalor de $i\partial_t$, luego $-\lambda_0 = E$.

Escribimos

$$\phi(x) = \int_{\lambda:E>0} d\lambda \phi_\lambda(x) a_\lambda + \int_{\lambda:E<0} d\lambda \phi_\lambda(x) a^\dagger_\lambda$$

IV. Cuantización canónica

Se separan los λ tales que $\phi_\lambda(x)$ corresponde a energía positiva, o negativa. En el caso $e^{i\lambda x}$, la energía es el autovalor de $i\partial_t$, luego $-\lambda_0 = E$.

Escribimos

$$\phi(x) = \int_{\lambda:E>0} d\lambda \phi_\lambda(x) a_\lambda + \int_{\lambda:E<0} d\lambda \phi_\lambda(x) a_\lambda^\dagger$$

En el ejemplo

$$\phi(x) = \int_{\lambda_0=-\sqrt{m^2+|k|^2}} d^3\lambda e^{i\lambda\cdot x} a_\lambda + \int_{\lambda_0=\sqrt{m^2+|k|^2}} d^3\lambda e^{i\lambda\cdot x} a_\lambda^\dagger$$

IV. Cuantización canónica

Se separan los λ tales que $\phi_\lambda(x)$ corresponde a energía positiva, o negativa. En el caso $e^{i\lambda x}$, la energía es el autovalor de $i\partial_t$, luego $-\lambda_0 = E$.

Escribimos

$$\phi(x) = \int_{\lambda:E>0} d\lambda \phi_\lambda(x) a_\lambda + \int_{\lambda:E<0} d\lambda \phi_\lambda(x) a^\dagger_\lambda$$

En el ejemplo

$$\phi(x) = \int_{\lambda_0=-\sqrt{m^2+|k|^2}} d^3\lambda e^{i\lambda\cdot x} a_\lambda + \int_{\lambda_0=\sqrt{m^2+|k|^2}} d^3\lambda e^{i\lambda\cdot x} a^\dagger_\lambda$$

y se imponen las relaciones

$$[a_\lambda, a^\dagger_{\lambda'}] = \hbar\delta_{\lambda\lambda'}$$

IV. Cuantización canónica

Se separan los λ tales que $\phi_\lambda(x)$ corresponde a energía positiva, o negativa. En el caso $e^{i\lambda x}$, la energía es el autovalor de $i\partial_t$, luego $-\lambda_0 = E$.

Escribimos

$$\phi(x) = \int_{\lambda:E>0} d\lambda \phi_\lambda(x) a_\lambda + \int_{\lambda:E<0} d\lambda \phi_\lambda(x) a_\lambda^\dagger$$

En el ejemplo

$$\phi(x) = \int_{\lambda_0=-\sqrt{m^2+|k|^2}} d^3\lambda e^{i\lambda\cdot x} a_\lambda + \int_{\lambda_0=\sqrt{m^2+|k|^2}} d^3\lambda e^{i\lambda\cdot x} a_\lambda^\dagger$$

y se imponen las relaciones

$$[a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger] = \hbar\delta_{\lambda\lambda'}$$

Definimos $\mathcal{A} = \mathbb{C}\{a_\lambda, a_\lambda^\dagger\}/([a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger] - \hbar\delta_{\lambda\lambda'})$

IV. Cuantización canónica

Se separan los λ tales que $\phi_\lambda(x)$ corresponde a energía positiva, o negativa. En el caso $e^{i\lambda x}$, la energía es el autovalor de $i\partial_t$, luego $-\lambda_0 = E$.

Escribimos

$$\phi(x) = \int_{\lambda:E>0} d\lambda \phi_\lambda(x) a_\lambda + \int_{\lambda:E<0} d\lambda \phi_\lambda(x) a^\dagger_\lambda$$

En el ejemplo

$$\phi(x) = \int_{\lambda_0=-\sqrt{m^2+|k|^2}} d^3\lambda e^{i\lambda\cdot x} a_\lambda + \int_{\lambda_0=\sqrt{m^2+|k|^2}} d^3\lambda e^{i\lambda\cdot x} a^\dagger_\lambda$$

y se imponen las relaciones

$$[a_\lambda, a^\dagger_{\lambda'}] = \hbar\delta_{\lambda\lambda'}$$

Definimos $\mathcal{A} = \mathbb{C}\{a_\lambda, a^\dagger_\lambda\}/([a_\lambda, a^\dagger_{\lambda'}] - \hbar\delta_{\lambda\lambda'})$ (un producto tensorial de tantas álgebras de Weyl como índices λ),

IV. Cuantización canónica

Se separan los λ tales que $\phi_\lambda(x)$ corresponde a energía positiva, o negativa. En el caso $e^{i\lambda x}$, la energía es el autovalor de $i\partial_t$, luego $-\lambda_0 = E$.

Escribimos

$$\phi(x) = \int_{\lambda:E>0} d\lambda \phi_\lambda(x) a_\lambda + \int_{\lambda:E<0} d\lambda \phi_\lambda(x) a_\lambda^\dagger$$

En el ejemplo

$$\phi(x) = \int_{\lambda_0=-\sqrt{m^2+|k|^2}} d^3\lambda e^{i\lambda\cdot x} a_\lambda + \int_{\lambda_0=\sqrt{m^2+|k|^2}} d^3\lambda e^{i\lambda\cdot x} a_\lambda^\dagger$$

y se imponen las relaciones

$$[a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger] = \hbar\delta_{\lambda\lambda'}$$

Definimos $\mathcal{A} = \mathbb{C}\{a_\lambda, a_\lambda^\dagger\}/([a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger] - \hbar\delta_{\lambda\lambda'})$ (un producto tensorial de tantas álgebras de Weyl como índices λ),
y $\mathcal{H} := \mathcal{A}/\mathcal{A}\{a_\lambda\}_\lambda$.

IV. Cuantización canónica

Se separan los λ tales que $\phi_\lambda(x)$ corresponde a energía positiva, o negativa. En el caso $e^{i\lambda x}$, la energía es el autovalor de $i\partial_t$, luego $-\lambda_0 = E$.

Escribimos

$$\phi(x) = \int_{\lambda:E>0} d\lambda\phi_\lambda(x)a_\lambda + \int_{\lambda:E<0} d\lambda\phi_\lambda(x)a_\lambda^\dagger$$

En el ejemplo

$$\phi(x) = \int_{\lambda_0=-\sqrt{m^2+|k|^2}} d^3\lambda e^{i\lambda\cdot x}a_\lambda + \int_{\lambda_0=\sqrt{m^2+|k|^2}} d^3\lambda e^{i\lambda\cdot x}a_\lambda^\dagger$$

y se imponen las relaciones

$$[a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger] = \hbar\delta_{\lambda\lambda'}$$

Definimos $\mathcal{A} = \mathbb{C}\{a_\lambda, a_\lambda^\dagger\}/([a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger] - \hbar\delta_{\lambda\lambda'})$ (un producto tensorial de tantas álgebras de Weyl como índices λ),
y $\mathcal{H} := \mathcal{A}/\mathcal{A}\{a_\lambda\}_\lambda$.
La clase de 1 en $\mathcal{H}$ se denomina $|0\rangle$.

IV. Cuantización canónica

Se separan los λ tales que $\phi_\lambda(x)$ corresponde a energía positiva, o negativa. En el caso $e^{i\lambda x}$, la energía es el autovalor de $i\partial_t$, luego $-\lambda_0 = E$.

Escribimos

$$\phi(x) = \int_{\lambda:E>0} d\lambda \phi_\lambda(x) a_\lambda + \int_{\lambda:E<0} d\lambda \phi_\lambda(x) a_\lambda^\dagger$$

En el ejemplo

$$\phi(x) = \int_{\lambda_0=-\sqrt{m^2+|k|^2}} d^3\lambda e^{i\lambda\cdot x} a_\lambda + \int_{\lambda_0=\sqrt{m^2+|k|^2}} d^3\lambda e^{i\lambda\cdot x} a_\lambda^\dagger$$

y se imponen las relaciones

$$[a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger] = \hbar\delta_{\lambda\lambda'}$$

Definimos $\mathcal{A} = \mathbb{C}\{a_\lambda, a_\lambda^\dagger\}/([a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger] - \hbar\delta_{\lambda\lambda'})$ (un producto tensorial de tantas álgebras de Weyl como índices λ),

y $\mathcal{H} := \mathcal{A}/\mathcal{A}\{a_\lambda\}_\lambda$.

La clase de 1 en $\mathcal{H}$ se denomina $|0\rangle$.

Este vector verifica $a_\lambda|0\rangle = 0$ para todo λ.

IV. Cuantización canónica

La forma bilineal queda determinada por la condición $a_\lambda|0\rangle = 0$ y $a_\lambda^* = a_\lambda^\dagger$.

IV. Cuantización canónica

La forma bilineal queda determinada por la condición $a_\lambda|0\rangle = 0$ y $a_\lambda^* = a_\lambda^\dagger$. Por ejemplo,

$$\langle 0|a_\lambda^\dagger = (a_\lambda|0\rangle)^* = 0^* = 0$$

IV. Cuantización canónica

La forma bilineal queda determinada por la condición $a_\lambda|0\rangle = 0$ y $a_\lambda^* = a_\lambda^\dagger$. Por ejemplo,

$$\langle 0|a_\lambda^\dagger = (a_\lambda|0\rangle)^* = 0^* = 0$$

Para dos vectores cualesquiera,

$$A|0\rangle \cdot B|0\rangle = \langle 0|A^\dagger B|0\rangle$$

IV. Cuantización canónica

La forma bilineal queda determinada por la condición $a_\lambda|0\rangle = 0$ y $a_\lambda^* = a_\lambda^\dagger$. Por ejemplo,

$$\langle 0|a_\lambda^\dagger = (a_\lambda|0\rangle)^* = 0^* = 0$$

Para dos vectores cualesquiera,

$$A|0\rangle \cdot B|0\rangle = \langle 0|A^\dagger B|0\rangle$$

Utilizando las reglas de conmutación, escribimos $A^\dagger B$ como combinacion lineal de productos con $a_\lambda^\dagger$'s a la izquierda y a_λ's a la derecha. Si sobrevive un a_λ a la derecha, o un $a_\lambda^\dagger$ a la izquierda, da cero, y el único termino que sobrevive es el constante, y definimos

$$\langle 0|z|0\rangle = z$$

si $z \in \mathbb{C}$.

IV. Algunos problemas

IV. Algunos problemas

Fantasmas

IV. Algunos problemas

Fantasmas

Si la forma bilineal resultara semidefinida, es decir, que existan estados de norma nula, estos estados se interpretan como estados con probabilidad cero (la norma es su densidad de probabilidad), por lo tanto, físicamente corresponde a identificarlos con cero, se toma $\mathcal{H}$ como el anterior, módulo los estados ortogonales a $\mathcal{H}$.

IV. Algunos problemas

Fantasmas

Si la forma bilineal resultara semidefinida, es decir, que existan estados de norma nula, estos estados se interpretan como estados con probabilidad cero (la norma es su densidad de probabilidad), por lo tanto, físicamente corresponde a identificarlos con cero, se toma $\mathcal{H}$ como el anterior, módulo los estados ortogonales a $\mathcal{H}$.

Si hay estados de norma negativa...

IV. Algunos problemas

IV. Algunos problemas

Infinitos

IV. Algunos problemas

Infinitos

Al hacer cuentas, para calcular valores medios $\langle A \rangle := \langle 0|A|0 \rangle$, muchas veces dan proporcionales a

$\int_{\mathbb{R}^D} 1 dVol = Vol(\mathbb{R}^D)$

IV. Algunos problemas

Infinitos

Al hacer cuentas, para calcular valores medios $\langle A \rangle := \langle 0|A|0 \rangle$, muchas veces dan proporcionales a

$\int_{\mathbb{R}^D} 1 dVol = Vol(\mathbb{R}^D) = ?$

IV. Algunos problemas

Infinitos

Al hacer cuentas, para calcular valores medios $\langle A \rangle := \langle 0|A|0\rangle$, muchas veces dan proporcionales a

$\int_{\mathbb{R}^D} 1 dVol = Vol(\mathbb{R}^D)$=?

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots =$

IV. Algunos problemas

Infinitos

Al hacer cuentas, para calcular valores medios $\langle A \rangle := \langle 0|A|0 \rangle$, muchas veces dan proporcionales a

$\int_{\mathbb{R}^D} 1 dVol = Vol(\mathbb{R}^D)$=?

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots = -\frac{1}{12}$$

IV. Algunos problemas

Infinitos

Al hacer cuentas, para calcular valores medios $\langle A\rangle := \langle 0|A|0\rangle$, muchas veces dan proporcionales a

$\int_{\mathbb{R}^D} 1 dVol = Vol(\mathbb{R}^D)=?$

$1+2+3+4+5+\cdots+n+\cdots=-\frac{1}{12}\ \cdots$

IV. Algunos problemas

Infinitos

Al hacer cuentas, para calcular valores medios $\langle A \rangle := \langle 0|A|0 \rangle$, muchas veces dan proporcionales a

$\int_{\mathbb{R}^D} 1 dVol = Vol(\mathbb{R}^D)$=?

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots = -\frac{1}{12} \cdots$$

Esquema de renormalización.

IV. Algunos problemas

Infinitos

Al hacer cuentas, para calcular valores medios $\langle A \rangle := \langle 0|A|0 \rangle$, muchas veces dan proporcionales a

$\int_{\mathbb{R}^D} 1 dVol = Vol(\mathbb{R}^D) = ?$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots = -\frac{1}{12} \cdots$

Esquema de renormalización.

Esquema bien determinado para teorías de Gauge,

IV. Algunos problemas

Infinitos

Al hacer cuentas, para calcular valores medios $\langle A \rangle := \langle 0|A|0 \rangle$, muchas veces dan proporcionales a

$\int_{\mathbb{R}^D} 1 dVol = Vol(\mathbb{R}^D) = ?$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots = -\frac{1}{12} \cdots$

Esquema de renormalización.

Esquema bien determinado para teorías de Gauge, como Electromagnetismo, Yang-Mills,

IV. Algunos problemas

Infinitos

Al hacer cuentas, para calcular valores medios $\langle A \rangle := \langle 0|A|0 \rangle$, muchas veces dan proporcionales a

$\int_{\mathbb{R}^D} 1 dVol = Vol(\mathbb{R}^D) = ?$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots = -\frac{1}{12} \cdots$

Esquema de renormalización.

Esquema bien determinado para teorías de Gauge, como Electromagnetismo, Yang-Mills,
Completamente desconocido en Relatividad general.

IV. Algunos problemas

Infinitos

Al hacer cuentas, para calcular valores medios $\langle A \rangle := \langle 0|A|0 \rangle$, muchas veces dan proporcionales a

$\int_{\mathbb{R}^D} 1 dVol = Vol(\mathbb{R}^D) = ?$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots = -\frac{1}{12} \cdots$$

Esquema de renormalización.

Esquema bien determinado para teorías de Gauge, como Electromagnetismo, Yang-Mills,
Completamente desconocido en Relatividad general.
Casi sin problemas en teorías conformes.

V. CFT

CFT = Conformal Field Theory

V. CFT

CFT = Conformal Field Theory = teoría (cuántica) de campos conforme

V. CFT

CFT = Conformal Field Theory = teoría (cuántica) de campos conforme = teoría de campos con invarianza conforme.

V. CFT en la naturaleza

V. CFT en la naturaleza

Modelos de mecánica estadística

V. CFT en la naturaleza

Modelos de mecánica estadística

Cristales bidimensionales, magnetizados, ...

V. CFT en la naturaleza

Modelos de mecánica estadística

Cristales bidimensionales, magnetizados, ...
Materia condensada

V. CFT en la naturaleza

V. CFT en la naturaleza

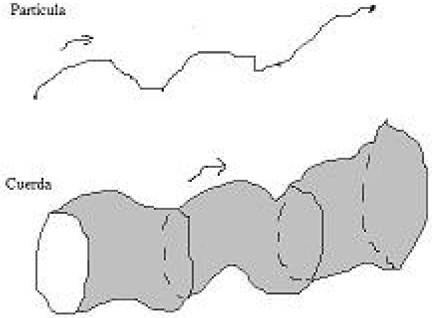
Cuerdas,

V. CFT en la naturaleza

Cuerdas, acción de Polyakov

V. CFT en la naturaleza

Cuerdas, acción de Polyakov
Una cuerda desplazándose en una variedad M^{D+1} tiene por trayectoria una “hoja de mundo”



V. CFT en la naturaleza

La acción de Polyakov de la cuerda es

$$S_{Poly} = \frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{ab} g_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$$

V. CFT en la naturaleza

La acción de Polyakov de la cuerda es

$$S_{Poly} = \frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{ab} g_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$$

es invariante por $h_{ab} \mapsto \Lambda(\sigma) h_{ab}$.

V. CFT en la naturaleza

La acción de Polyakov de la cuerda es

$$S_{Poly} = \frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{ab} g_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$$

es invariante por $h_{ab} \mapsto \Lambda(\sigma) h_{ab}$. Por lo tanto, considerrando los $X^\mu(\sigma)$ como campos en la variedad de parámetros (σ^1, σ^2), esta acción da una teoría de campos con D campos, invariante conforme.

V. CFT en la naturaleza

La acción de Polyakov de la cuerda es

$$S_{Poly} = \frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{ab} g_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$$

es invariante por $h_{ab} \mapsto \Lambda(\sigma) h_{ab}$. Por lo tanto, considerrando los $X^\mu(\sigma)$ como campos en la variedad de parámetros (σ^1, σ^2), esta acción da una teoría de campos con D campos, invariante conforme. Notar que la cuerda se mueve en una variedad M de dimensión arbitraria (10, 11, 26,...).

VI. Correspondencia AdS/CFT

El espacio Anti de Sitter

VI. Correspondencia AdS/CFT

El espacio Anti de Sitter
Así como la esfera es el espacio Riemanniano de curvatura constante positiva, el espacio hiperbólico es el de curvatura constante negativa.

Se denomina espacio de Sitter al espacio Lorenziano de curvatura constante positiva, y espacio **anti de Sitter** al espacio Lorenziano de curvatura negativa.

VI. Correspondencia AdS/CFT

El espacio Anti de Sitter
Así como la esfera es el espacio Riemanniano de curvatura constante positiva, el espacio hiperbólico es el de curvatura constante negativa.

Se denomina espacio de Sitter al espacio Lorenziano de curvatura constante positiva, y espacio **anti de Sitter** al espacio Lorenziano de curvatura negativa.
En coordenadas $(t, x, y_2, y_3, \cdots)$ con $x > 0$, el espacio anti de Sitter tiene métrica

$$ds^2 = \frac{-dt^2 + dx^2 + dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots}{x^2}$$

VI. Correspondencia AdS/CFT

El espacio Anti de Sitter
Así como la esfera es el espacio Riemanniano de curvatura constante positiva, el espacio hiperbólico es el de curvatura constante negativa.

Se denomina espacio de Sitter al espacio Lorenziano de curvatura constante positiva, y espacio **anti de Sitter** al espacio Lorenziano de curvatura negativa.
En coordenadas $(t, x, y_2, y_3, \cdots)$ con $x > 0$, el espacio anti de Sitter tiene métrica

$$ds^2 = \frac{-dt^2 + dx^2 + dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots}{x^2}$$

Hay (evidentemente) $D-1$ traslaciones $y \mapsto y + a$, que dejan invariante la métrica. El grupo $\mathrm{ISO}(AdS_{D+1}) \cong \mathrm{SO}(D,2)$.

VI. Correspondencia AdS/CFT

El espacio Anti de Sitter
Así como la esfera es el espacio Riemanniano de curvatura constante positiva, el espacio hiperbólico es el de curvatura constante negativa.

Se denomina espacio de Sitter al espacio Lorenziano de curvatura constante positiva, y espacio **anti de Sitter** al espacio Lorenziano de curvatura negativa.
En coordenadas $(t, x, y_2, y_3, \cdots)$ con $x > 0$, el espacio anti de Sitter tiene métrica

$$ds^2 = \frac{-dt^2 + dx^2 + dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots}{x^2}$$

Hay (evidentemente) $D - 1$ traslaciones $y \mapsto y + a$, que dejan invariante la métrica. El grupo $\mathrm{ISO}(AdS_{D+1}) \cong \mathrm{SO}(D, 2)$.
Igual al grupo conforme en dimension D, si $D \geq 3$!!

VI. Correspondencia AdS/CFT

Métricas asintóticamente anti de Sitter

VI. Correspondencia AdS/CFT

Métricas asintóticamente anti de Sitter

Son métricas en donde se fija un tipo de condición asintótica, y a menos de esa condición, son AdS. Por ejemplo, en las mismas coordenadas que antes, una condición asintótica podría ser $g_{00} = \frac{1}{x} + O(\frac{1}{x^2})$.

VI. Correspondencia AdS/CFT

Métricas asintóticamente anti de Sitter

Son métricas en donde se fija un tipo de condición asintótica, y a menos de esa condición, son AdS. Por ejemplo, en las mismas coordenadas que antes, una condición asintótica podría ser $g_{00} = \frac{1}{x} + O(\frac{1}{x^2})$.

Se puede considerar el grupo de "isometrias asintóticas" = transformaciones de $\mathbb{R}^D$ que llevan una métrica asintóticamente AdS en (otra) asintóticamente AdS. Por ejemplo, las isometrías de AdS.

VI. Correspondencia AdS/CFT

[Henneaux] Para $D > 3$, este grupo, en principio más grande, en realidad coincide con $\mathrm{ISO}(AdS_D)$.

VI. Correspondencia AdS/CFT

[Henneaux] Para $D > 3$, este grupo, en principio más grande, en realidad coincide con $\mathrm{ISO}(AdS_D)$.
Pero para $D = 3$, este grupo (mejor dicho, el álgebra de Lie de transformaciones infinitesimales) tiene dimensión infinita, isomorfo a $W_2 \times W_2$, con carga central que depende de la teoría gravitatoria de la que AdS sea solución (clásica).

VI. Correspondencia AdS/CFT

[Henneaux] Para $D > 3$, este grupo, en principio más grande, en realidad coincide con $\mathrm{ISO}(AdS_D)$.
Pero para $D = 3$, este grupo (mejor dicho, el álgebra de Lie de transformaciones infinitesimales) tiene dimensión infinita, isomorfo a $W_2 \times W_2$, con carga central que depende de la teoría gravitatoria de la que AdS sea solución (clásica).

En relatividad general en dimension 3, la teoría conforme que le corresponde tiene carga central $c = \dfrac{3G}{2\sqrt{|\Lambda|}}$.

VI. Correspondencia AdS/CFT

[Maldacena] Conjetura: una teoría de gravedad en dimensión D (cuántica!) que admita el espacio AdS como solución clásica (o una solución asintóticamente AdS), es equivalente a una teoría de campos conforme (sin gravedad) en dimensión $D - 1$.

VI. Correspondencia AdS/CFT

[Maldacena] Conjetura: una teoría de gravedad en dimensión D (cuántica!) que admita el espacio AdS como solución clásica (o una solución asintóticamente AdS), es equivalente a una teoría de campos conforme (sin gravedad) en dimensión $D - 1$.

En particular, una teoría de gravedad en dimensión tres debería tener infinitas simetrias, y por lo tanto, infinitas corrientes conservadas.

Problemas

Problemas

- Esclarecer cualquiera de los aspectos de la correspondencia.

Problemas

- Esclarecer cualquiera de los aspectos de la correspondencia.

- Axiomatizar de manera eficaz una teoría cuántica de campos.

Problemas

- Esclarecer cualquiera de los aspectos de la correspondencia.

- Axiomatizar de manera eficaz una teoría cuántica de campos.
  - Wightman: campos en general.
  - Segal: Teorías conformes.
    Kac: Vertex algebras.
  - Atiyah-Segal: teorías topológicas.

Problemas

- Esclarecer cualquiera de los aspectos de la correspondencia.

- Axiomatizar de manera eficaz una teoría cuántica de campos.
  - Wightman: campos en general.
  - Segal: Teorías conformes.
    Kac: Vertex algebras.
  - Atiyah-Segal: teorías topológicas.

- Esclarecer (matemáticamente) el significado de invarianza en teorías cuánticas.

Problemas

- Esclarecer cualquiera de los aspectos de la correspondencia.

- Axiomatizar de manera eficaz una teoría cuántica de campos.
  - Wightman: campos en general.
  - Segal: Teorías conformes.
    Kac: Vertex algebras.
  - Atiyah-Segal: teorías topológicas.

- Esclarecer (matemáticamente) el significado de invarianza en teorías cuánticas.

- Dado un operador en una teoría de gravedad, cuál es el operador que le corresponde en la teoría conforme?

Problemas

- Esclarecer cualquiera de los aspectos de la correspondencia.

- Axiomatizar de manera eficaz una teoría cuántica de campos.
  - Wightman: campos en general.
  - Segal: Teorías conformes.
    Kac: Vertex algebras.
  - Atiyah-Segal: teorías topológicas.

- Esclarecer (matemáticamente) el significado de invarianza en teorías cuánticas.

- Dado un operador en una teoría de gravedad, cuál es el operador que le corresponde en la teoría conforme?
  Por ejemplo, las fluctuaciones de $g_{\mu\nu}$ se corresponden con fluctuaciones del tensor energía momento.

Problemas

- Esclarecer cualquiera de los aspectos de la correspondencia.

- Axiomatizar de manera eficaz una teoría cuántica de campos.
  - Wightman: campos en general.
  - Segal: Teorías conformes.
    Kac: Vertex algebras.
  - Atiyah-Segal: teorías topológicas.

- Esclarecer (matemáticamente) el significado de invarianza en teorías cuánticas.

- Dado un operador en una teoría de gravedad, cuál es el operador que le corresponde en la teoría conforme?
  Por ejemplo, las fluctuaciones de $g_{\mu\nu}$ se corresponden con fluctuaciones del tensor energía momento.

- Qué significa ”dos teorías de campos son equivalentes”.