Álgebras de Hopf punteadas sobre grupos no abelianos

Fernando Fantino

Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

elENA IV – La Falda
8 de agosto de 2008

Definiciones 1.

Sea A una $\Bbbk$-álgebra de Hopf.

- *elementos de tipo grupo*:

$$G(A) := \{x \in A - 0 : \Delta(x) = x \otimes x\}.$$

- *corradical* de A:

$$A_0 := \sum_{\substack{C \\ \text{subcoálgebra simple de } A}} C.$$

Definición

A se dice *punteada* si $A_0 = \Bbbk G(A)$.

Problema: clasificar álgebras de Hopf punteadas.

G grupo finito y $\Bbbk = \mathbb{C}$.

Clasificación de las álgebras de Hopf punteadas complejas de dimensión finita A, con $G(A) \simeq G$.

$\uparrow$ Método del levante
(Andruskiewitsch – Schneider)

Determinar todos los *módulos de Yetter-Drinfeld* W sobre $\mathbb{C}G$, tales que su *álgebra de Nichols* $\mathfrak{B}(W)$ tiene dimensión finita.

- *espacio vectorial trenzado*: (e.v.t.) (W, c), W espacio vectorial y $c \in \mathrm{GL}(W \otimes W)$ solución de la *ecuación de trenzas*

$$(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes c)(c \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes c).$$

- H con antípoda biyectiva. Un $\Bbbk$-espacio vectorial M se dice un *módulo de Yetter-Drinfeld (a izquierda) sobre H* si es un H-módulo a izquierda, un H-comódulo a izquierda y:

$$(h \cdot m)_{(-1)} \otimes (h \cdot m)_{(0)} = h_{(1)} m_{(-1)} \mathcal{S} h_{(3)} \otimes h_{(2)} \cdot m_{(0)}.$$

Si $\dim H < \infty$ y $D(H)$ denota el *doble de H*, entonces

$${}^{H}_{H}\mathcal{YD} \simeq {}_{D(H)}\mathcal{M}.$$

El módulo de Yetter-Drinfeld irreducible $M(\mathcal{O}, \rho)$.

${}^{\mathbb{C}G}_{\mathbb{C}G}\mathcal{YD}$ es semisimple.

$W \in {}^{\mathbb{C}G}_{\mathbb{C}G}\mathcal{YD}$ irreducibles	$\leftrightarrow$	$(\mathcal{O}, \rho)$, $\mathcal{O}$ clase conj. en G, $(\rho, V) \in \widehat{G^\sigma}$, $\sigma \in \mathcal{O}$ fijo

$\{\sigma_1 = \sigma, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$ numeración de $\mathcal{O}$.
$\{g_1, g_2, \dots, g_N\}$ en G tales que $\sigma_j = g_j \sigma g_j^{-1}$.

$$M(\mathcal{O}, \rho) := \mathrm{Ind}_{G^\sigma}^{G} V = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G^\sigma} V = \bigoplus_{j=1}^{N} g_j \otimes V$$

- Acción: $g \cdot g_j v := g_h(\gamma \cdot v), \quad gg_j = g_h\gamma,\ \gamma \in G^\sigma,$
- Coacción: $\delta(g_j v) := \sigma_j \otimes g_j v,$
- Trenza: $c(g_i v \otimes g_j w) := g_h(\gamma \cdot w) \otimes g_i v, \quad \sigma_i g_j = g_h\gamma,\ \gamma \in G^\sigma.$

Álgebra de Nichols.

Definición

Un álgebra de Nichols es un álgebra de Hopf trenzada graduada $\mathfrak{B} = \oplus_{n\geq 0}\mathfrak{B}_n$ *tal que*

- $\mathfrak{B}_0 \simeq \Bbbk$,
- $\mathfrak{B}_1 \simeq \mathcal{P}(\mathfrak{B})$ *elementos primitivos de* $\mathfrak{B}$, *y*
- $\mathfrak{B}$ *está generada como álgebra por* $\mathfrak{B}_1$.

rango de $\mathfrak{B} = \dim \mathfrak{B}_1$.

$$(W, \mathrm{flip}) \quad \rightsquigarrow \quad \mathfrak{B}(W) = S(W) \qquad \text{álgebra simétrica,}$$
$$(W, -\mathrm{flip}) \quad \rightsquigarrow \quad \mathfrak{B}(W) = \bigwedge(W) \qquad \text{álgebra exterior.}$$

Caso $G(H)$ abeliano.

A-Sch clasifican las álgebras de Hopf punteadas H con $G(H)$ abeliano, tales que los divisores primos del orden del grupo son > 7.

"On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras", Ann. Math., accepted.

Utilizan trabajos de Heckenberger: clasificación de las álgebras de Nichols de tipo diagonal de dimensión finita.

"Classification of arithmetic root systems", `math.QA/0605795`.

(W, c) de *tipo diagonal*: si $\exists w_1, \dots, w_\theta$ base de W y $q_{ij} \in \Bbbk^\times$

$$c(w_i \otimes w_j) = q_{ij}\ w_j \otimes w_i.$$

Caso $G(H)$ no abeliano.

Se conocen pocos ejemplos con $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) < \infty$.

- Milinski-Sch (1996): transposiciones en $\mathbb{S}_n$, $n = 3, 4, 5$. A-Graña (1999).
- A-Gr (2003): cálculos sobre algunos racks afines. *"From racks to pointed Hopf algebras"*, Adv. Math. **178** (2003) 177-243.
- Gr: zoo de ejemplos $\mathfrak{B}(\mathbb{C}X, \mathfrak{q} = -1)$, con $3 \leq \#X \leq 10$. *"On Nichols algebras of low dimension"*, Contemp. Math. **267** (2000) 111-134.
  http://mate.dm.uba.ar/~matiasg/zoo.html

Caso $G(H)$ no abeliano: clasificados hasta ahora.

- $\mathbb{S}_3$: [AHSch], *"The Nichols algebra of a semisimple Yetter-Drinfeld module"*, `arXiv:0803.2430v1`.

$$\mathbb{C}\mathbb{S}_3, \quad \mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^3, \mathrm{sgn})\#\mathbb{C}\mathbb{S}_3 \quad \text{ó} \quad \mathcal{A}(\mathbb{S}_3, \mathcal{O}_2^3, 1).$$

- $\mathbb{A}_5$: [AF1] (2007). $\mathbf{SL}(2, \mathbb{F}_{2^n})$: Freyre-Gr-Vendramín (2007) *"On Nichols algebras over* $\mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ *and* $\mathbf{SL}(2, \mathbb{F}_q)$*"*, J. Math. Phys. **48** (2007) 123513 1-11.
- $\mathbf{PSL}(3, \mathbb{F}_4)$: [FrV].
- $\mathbb{A}_7$: [F, Tesis].
- M_{22} y M_{24}: [F1].
- J_1, J_2, J_3, He, Suz: [AFGrV], en preparación.

Métodos.

$$(\mathcal{O},\rho) \rightsquigarrow M(\mathcal{O},\rho) \rightsquigarrow \mathfrak{B}(\mathcal{O},\rho)$$

Problema: descartar pares $(\mathcal{O},\rho)$ tales que $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O},\rho) = \infty$.

Estrategia: hallar U sube.v.t. de $M(\mathcal{O},\rho)$ tal que $\dim \mathfrak{B}(U) = \infty$.

Definición

Un *rack* es un par $(X, \triangleright)$, con $X \neq \emptyset$, $\triangleright : X \times X \to X$, tal que $x \triangleright -$ es biyectiva y $x \triangleright (y \triangleright z) = (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z)$.

Ejemplo: una clase de conjugación de un grupo con $x \triangleright y = xyx^{-1}$.

MÉTODOS:

- por *subracks abelianos* (i. e. $x \triangleright y = y \ \forall x, y \in T \subseteq X$).
- por *subracks no abelianos*.

Grupo diedral: $\mathbb{D}_m = \langle x, y \mid x^2 = 1 = y^m, xy = y^{-1}x \rangle$.
Sea m impar. Si $(\mathcal{O}, \rho) \neq (\mathcal{O}_x, \mathrm{sgn})$, entonces $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$.
$\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_x, \mathrm{sgn}) = 12$, si $m = 3$; $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_x, \mathrm{sgn}) =?$, si $m \neq 3$.

Teorema. [AHSch] $\dim \mathfrak{B}(M(\mathcal{O}_x, \mathrm{sgn}) \oplus M(\mathcal{O}_x, \mathrm{sgn})) = \infty$.

Definición

$m > 1$ impar. $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}/m} \subseteq G$ se dice de tipo $\mathcal{D}_m$ si

$$x_i \triangleright x_j = x_{2i-j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}/m.$$

$(x_i)_{i\in\mathbb{Z}/m}$, $(y_i)_{i\in\mathbb{Z}/m}$ de tipo $\mathcal{D}_m$ en G, tal que $x_i \neq y_j$ $\forall i, j \in \mathbb{Z}/m$.
Diremos que $(x, y) := (x_i)_{i\in\mathbb{Z}/m} \cup (y_i)_{i\in\mathbb{Z}/m}$ es de tipo $\mathcal{D}_m^{(2)}$ si

$$x_i \triangleright y_j = y_{2i-j}, \quad y_i \triangleright x_j = x_{2i-j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}/m.$$

Teorema

p primo impar, $(x, y) = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}/p} \cup (y_i)_{i\in\mathbb{Z}/p} \subseteq \mathcal{O}_{x_0}$, con $g \triangleright x_0 = y_0$, y $(\rho, V) \in \widehat{G^{x_0}}$. Si

- H1 *(x, y) es de tipo $\mathcal{D}_p^{(2)}$,*
- H2 $q_{x_0 x_0} = -1$,
- H3 *existen $v, w \in V - 0$ tales que,*

$$\rho(y_0)v = -v \quad y \quad \rho(g^{-1}x_0 g)w = -w,$$

entonces $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{x_0}, \rho) = \infty$.

Sea $\mathcal{O}_4^4$ la clase de conjugación de los 4-ciclos en $\mathbb{S}_4$. En [AGr], se muestra que $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_4^4, \chi_{(-1)}) = 576$.

Teorema. [AHSch] $\dim \mathfrak{B}(M(\mathcal{O}_4^4, \chi_{(-1)}) \oplus M(\mathcal{O}_4^4, \chi_{(-1)})) = \infty$.

Definición

i) *rack del octaedro* $=$ *rack isomorfo a* $\mathcal{O}_4^4$.

ii) $(x_i)_{i=1}^6$ *elementos distintos de* G *se dice de tipo* $\mathfrak{D}$ *si*

$$x_i \triangleright x_j = x_{i \triangleright j}, \quad \triangleright \textit{ del octaedro.}$$

iii) $(x_i)_{i=1}^6$ *y* $(y_i)_{i=1}^6$ *de tipo* $\mathfrak{D}$ *en* G, *tal que* $x_i \neq y_j$ $\forall i, j$. *Diremos que* $(x, y) := (x_i)_{i=1}^6 \cup (y_i)_{i=1}^6$ *es de tipo* $\mathfrak{D}^{(2)}$ *si*

$$x_i \triangleright y_j = y_{i \triangleright j}, \quad y_i \triangleright x_j = x_{i \triangleright j}.$$

Criterio de tipo $\mathfrak{D}$.

Teorema

$(x_i, y_i)_{i=1}^{6} \subseteq \mathcal{O}_{x_1}$, con $g \triangleright x_1 = y_1$, y $\rho = (\rho, V) \in \widehat{G^{x_1}}$. Si

- H1 (x, y) es de tipo $\mathfrak{D}^{(2)}$,
- H2 $q_{x_1 x_1} = -1$,
- H3 existen v, $w \in V - 0$ tales que

$$\rho(x_6)v = -v = \rho(y_1)v,$$
$$\rho(g^{-1}x_1 g)w = -w = \rho(g^{-1}x_6 g)w,$$

entonces $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_{x_1}, \rho) = \infty$.

[AF2] *"New techniques for pointed Hopf algebras"*, `arXiv:0803.3486v2`

Aplicaciones: grupos simétricos.

$\sigma \in \mathbb{S}_m$.

- *tipo* de $\sigma := (1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m})$.
- $\mathcal{O}_\sigma = \{\tau \in \mathbb{S}_m \,:\, \text{tipo de } \tau = \text{tipo de } \sigma\}$.
- $\mathbb{S}_m^\sigma = T_1 \cdots T_m, \quad T_i \simeq (\mathbb{Z}/i)^{n_i} \rtimes \mathbb{S}_{n_i}$.
- $\rho \in \widehat{\mathbb{S}_m^\sigma}$ es $\rho = \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_m$, $\rho_i \in \widehat{T_i}$ dada por

$$\rho_i = \mathrm{Ind}_{(\mathbb{Z}/i)^{n_i} \rtimes \mathbb{S}_{n_i}^\chi}^{(\mathbb{Z}/i)^{n_i} \rtimes \mathbb{S}_{n_i}} \chi \otimes \mu, \quad \chi \in \widehat{(\mathbb{Z}/i)^{n_i}}, \mu \in \widehat{\mathbb{S}_{n_i}^\chi}.$$

Si $\sigma = A_1 \cdots A_m$, denotamos $\sigma_{\mathrm{e}} := \prod_{i \text{ par}} A_i$ y $\sigma_{\mathrm{o}} := \prod_{i \text{ impar}} A_i$.

Aplicaciones: grupos simétricos.

Teorema

Si $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) < \infty$, entonces $q_{\sigma\sigma} = -1$ y ocurre alguna de las siguientes situaciones:

1. $(1^{n_1}, 2)$, $\rho_1 = \text{sgn}$ ó ϵ, $\rho_2 = \text{sgn}$.
2. $(2, \sigma_o)$, $\sigma_o \neq \text{id}$, $\rho_2 = \text{sgn}$, $\rho_j = \text{Ind}(\overrightarrow{\chi_{(0)}} \otimes \mu_j)$, $\forall j > 1$ impar.
3. $(1^{n_1}, 2^3)$, $\rho_1 = \text{sgn}$ ó ϵ, $\rho_2 = \chi_{(3)} \otimes \epsilon$ ó $\chi_{(3)} \otimes \text{sgn}$.
   Más aún, si $n_1 > 0$, entonces $\rho_2 = \chi_{(3)} \otimes \text{sgn}$.
4. (2^5), $\rho_2 = \chi_{(5)} \otimes \epsilon$ ó $\chi_{(5)} \otimes \text{sgn}$.
5. $(1^{n_1}, 4)$, $\rho_1 = \text{sgn}$ ó ϵ, $\rho_4 = \chi_{(-1)}$.
6. $(1^{n_1}, 4^2)$, $\rho_1 = \text{sgn}$ ó ϵ, $\rho_4 = \chi_{(i,i)} \otimes \text{sgn}$ ó $\chi_{(-i,-i)} \otimes \text{sgn}$.
7. $(2, 4)$, $\rho = \text{sgn} \otimes \epsilon$ ó $\rho = \epsilon \otimes \chi_{(-1)}$.
8. $(2, 4^2)$, $\rho_2 = \epsilon$, $\rho_4 = \chi_{(i,i)} \otimes \text{sgn}$ ó $\chi_{(-i,-i)} \otimes \text{sgn}$.
9. $(2^2, 4)$, $\deg \rho_2 = 1$, $\rho_4 = \chi_{(-1)}$.

Idea de la prueba

-) $j = 2pk$, p primo impar y $k \geq 1$. $\alpha = (i_1\, i_2\, \cdots\, i_j)$ un j-ciclo en σ. $\mathbf{P} := (i_2\, i_4\, \cdots\, i_j)$. Luego, $\sigma_l := \mathbf{P}^{lk}\sigma\mathbf{P}^{-lk}$, $l \in \mathbb{Z}/p$, es de tipo $\mathcal{D}_p$.

-) $n_j \geq 3$, $j = 2k$, con $k \geq 2$: $\mathcal{D}_3$.

-) $n_{2^k} \geq 1$, $k \geq 3$: $\sigma_l := \mathbf{P}^{2^{k-3}l}\,\sigma\,\mathbf{P}^{-2^{k-3}l}$, $l \in \mathbb{Z}/4$, es subrack "transversal" de tipo $\mathcal{D}_4^{(2)}$. □

A-F-Zhang, *"On pointed Hopf algebras associated with the symmetric group"*, arXiv:0807.2406v2.

$\sigma \in \mathbb{A}_m$ de tipo $(1^{n_1}, 2^{n_2}, \dots, m^{n_m})$.

$$\mathcal{O}_\sigma^{\mathbb{S}_m} = \begin{cases} \mathcal{O}_\sigma^{\mathbb{A}_m} \cup \mathcal{O}_{(1\,2)\sigma(1\,2)}^{\mathbb{A}_m}, & \text{si } n_{\text{par}} = 0 \text{ y } n_{\text{impar}} = 1. \\ \mathcal{O}_\sigma^{\mathbb{A}_m}, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Teorema

- $\sigma \in \mathbb{A}_m$, $m > 4$ ó $\sigma \neq (1\,2\,3), (1\,3\,2)$, $\rho \in \widehat{\mathbb{A}_m^\sigma}$.
  Si $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}_\sigma, \rho) < \infty \Rightarrow q_{\sigma\sigma} = -1$.
- no existen álgebras de Hopf punteadas complejas de dimensión finita H con $G(H) \simeq \mathbb{A}_5$, resp. $\mathbb{A}_7$, salvo $\mathbb{C}\mathbb{A}_5$, resp. $\mathbb{C}\mathbb{A}_7$.

Grupo	Clase de conjugación	Centralizador	Representación
$\mathbb{A}_4$	$\mathcal{O}_\sigma$, $\sigma = (1\,2\,3)$ ó $(1\,3\,2)$	$\langle\sigma\rangle \simeq \mathbb{Z}/3$	$\chi(\sigma) = \omega_3,\ \omega_3^2$
$\mathbb{A}_6$	$\mathcal{O}_\sigma$, $\sigma = (1\,2)(3\,4\,5\,6)$	$\langle\sigma\rangle \simeq \mathbb{Z}/4$	$\chi(\sigma) = -1$
$\mathbb{A}_8$	$\mathcal{O}_\sigma$, $\sigma = (1\,2\,3\,4)(5\,6\,7\,8)$	$\mathbb{A}_8^\sigma$ no abeliano, $\lvert\mathbb{A}_8^\sigma\rvert = 16$	rep. de grado 1

Cuadro: Casos de trenza negativa $\mathbb{A}_m$, $4 \leq m \leq 8$.

GAP: *Groups, Algorithms and Programming*.

Grupos de Mathieu simples: M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23} y M_{24}.

- Grupo de automorfismos de sistemas de Steiner.
- Grupo de automorfismos del código de Golay.

Cantidad de pares $(\mathcal{O}, \rho)$ posibles : 1137.

Cantidad de pares $(\mathcal{O}, \rho)$ con $M(\mathcal{O}, \rho)$ de trenza *negativa*: 23.

Cantidad de pares $(\mathcal{O}, \rho)$ con $\dim \mathfrak{B}(\mathcal{O}, \rho) = \infty$: 1130.

Trenza *negativa*: si $\mathfrak{B}(T, \rho) = \bigwedge(M(T, \rho))$, el álgebra exterior, $\forall T \subseteq \mathcal{O}$ subrack abeliano.

Grupos de Mathieu simples.

G	j	$\lvert s_j \rvert$	**Centralizer**	**Representation**	$\dim M(\mathcal{O}_{s_j}, \rho)$
M_{11}	10	6	$\langle s_{10} \rangle \simeq \mathbb{Z}/6$	$\chi_{(-1)}$	1320
M_{12}	2	6	$\langle s_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}/6$	$\chi_{(-1)}$	15840
	5	8	$\langle s_5 \rangle \simeq \mathbb{Z}/8$	$\chi_{(-1)}$	11880
	14	8	$\langle s_{14} \rangle \simeq \mathbb{Z}/8$	$\chi_{(-1)}$	11880
M_{22}	4	8	$\langle s_4 \rangle \simeq \mathbb{Z}/8$	$\chi_{(-1)}$	55440
M_{23}	9	8	$\langle s_9 \rangle \simeq \mathbb{Z}/8$	$\chi_{(-1)}$	1275120
M_{24}	6	4	$M_{24}^{s_6}$, $\lvert M_{24}^{s_6} \rvert = 384$	$\rho_{2,6}$	637560
				$\rho_{3,6}$	
	8	4	$M_{24}^{s_8}$, $\lvert M_{24}^{s_8} \rvert = 96$	$\rho_{2,8}$	2550240
				$\rho_{3,8}$	
	14	8	$\langle x, s_{14} \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/8$	$\epsilon \otimes \chi_{(-1)}$	15301440
				$\operatorname{sgn} \otimes \chi_{(-1)}$	
	17	12	$\langle s_{17} \rangle \simeq \mathbb{Z}/12$	$\chi_{(-1)}$	20401920
	18	12	$\langle s_{18} \rangle \simeq \mathbb{Z}/12$	$\chi_{(-1)}$	20401920
	19	14	$\langle s_{19} \rangle \simeq \mathbb{Z}/14$	$\chi_{(-1)}$	17487360
	20	14	$\langle s_{20} \rangle \simeq \mathbb{Z}/14$	$\chi_{(-1)}$	17487360

Cuadro: Casos eliminados con técnicas no abelianas.

Técnica $\mathcal{D}_3$ Técnica $\mathfrak{O}$

Grupos de Mathieu simples.

G	j	$\lvert s_j \rvert$	**Centralizador**	**Representación**	dim $M(\mathcal{O}_{s_j}, \rho)$
M_{11}	4	4	$\langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}/8,\ x^6 = s_4$	$\nu_2(x) := i$	990
				$\nu_6(x) := -i$	
	6	8	$\langle s_6 \rangle \simeq \mathbb{Z}/8$	$\chi_{(-1)}$	990
	7	8	$\langle s_7 \rangle \simeq \mathbb{Z}/8$	$\chi_{(-1)}$	990
M_{12}	13	10	$\langle s_{13} \rangle \simeq \mathbb{Z}/10$	$\chi_{(-1)}$	9504
M_{23}	12	14	$\langle s_{12} \rangle \simeq \mathbb{Z}/14$	$\chi_{(-1)}$	728640
	13	14	$\langle s_{13} \rangle \simeq \mathbb{Z}/14$	$\chi_{(-1)}$	728640

Cuadro: Grupos de Mathieu simples: casos abiertos.

Teorema

No existen álgebras de Hopf punteadas complejas de dimensión finita H con $G(H) \simeq M_{22}$, resp. M_{24}, salvo $\mathbb{C}M_{22}$, resp. $\mathbb{C}M_{24}$.

http://www.mate.uncor.edu/~fantino/GAP/mathieu.htm

Bibliografía.

[AF1] *"On pointed Hopf algebras associated with alternating and dihedral groups"*, Rev. Unión Mat. Argent. 48 (2007) 3 57-71.

[AF2] *"New techniques for pointed Hopf algebras"*, `arXiv:0803.3486v2`, 29 pp.

[AFZ] *"On pointed Hopf algebras associated with the symmetric groups"*, `arXiv:0807.2406v2`, 14 pp.

[F1] *"On pointed Hopf algebras associated with the Mathieu simple groups"*, `arXiv:0711.3142v2`, 41 pp.

[F2] *"Álgebras de Hopf punteadas sobre grupos no abelianos"*, Tesis de Doctorado, FaMAF-UNC (2008).