Estructuras geométricas en nilvariedades: algunas restricciones algebraicas

María Laura Barberis

FaMAF-Universidad Nacional de Córdoba
CIEM-CONICET

IV Encuentro Nacional de Algebra

La Falda, Córdoba
Agosto 7, 2008

Plan

- Grupo de holonomía de una métrica Riemanniana
- Clasificación de los grupos de holonomía Riemanniana
- Generalidades sobre nilvariedades
- Un resultado para nilvariedades HKT
- Una familia de ejemplos

Grupo de holonomía de una métrica Riemanniana

Dada (M, g) Riemanniana, hay una noción de transporte paralelo de vectores tangentes a lo largo de curvas C^∞ a trozos en M.

Se define

$$\mathrm{Hol}_p(g) := \{P_\gamma \mid \gamma \text{ lazo en } p\},$$

$$P_\gamma : T_pM \to T_pM \ \text{ es el transporte paralelo a lo largo de } \gamma,$$

$$P_\gamma \in O(T_pM).$$

Si (M_1, g_1), (M_2, g_2) son dos variedades Riemannianas conexas y $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ es el producto Riemanniano resulta:

$$\mathrm{Hol}(g_1 \times g_2) = \mathrm{Hol}(g_1) \times \mathrm{Hol}(g_2)$$

Grupo de holonomía de una métrica Riemanniana

Si (M, g) es Riemanniana, entonces $\mathrm{Hol}(g) \subset O(m)$, $m = \dim M$.

En algunos casos $\mathrm{Hol}(g)$ es un subgrupo propio de $O(m)$.

Esto ocurre cuando g es compatible con alguna estructura geométrica adicional en M.

Ejemplo. Sea (M, g) una variedad de *Kähler*, es decir, existe una estructura compleja J en M tal que:

- $g(JX, JY) = g(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,
- $\omega_J := g(J\cdot, \cdot)$ es una 2-forma cerrada.

En este caso, $\dim M = 2n$ y $\mathrm{Hol}(g) \subset U(n) \subset SO(2n)$.

Grupo de holonomía de una métrica Riemanniana

(M, g) se dice

- *reducible* si es localmente isométrica a un producto Riemanniano;
- *irreducible* si no es reducible;
- *localmente simétrica* si $\nabla R = 0$.

(M, g) es irreducible $\Longleftrightarrow$ la acción de $\mathrm{Hol}_p(g)$ en T_pM es irreducible.

Teorema (M. Berger, 1955)

Si (M, g) *es Riemanniana irreducible, simplemente conexa y no es localmente simétrica* ($\dim M = m$)*, sea* $H =$ *Hol*(g)*. Entonces* H *es alguno de los siguientes grupos:*

1. $H = SO(m)$, M es *orientable*,
2. $m = 2n$, $H = U(n)$, *Kähler*,
3. $m = 2n$, $H = SU(n)$, *Calabi-Yau*,
4. $m = 4n$, $H = Sp(n)$, *hiper-Kähler*,
5. $m = 4n$, $H = Sp(1) \cdot Sp(n)$, *cuaterniónica Kähler*,
6. $m = 7$, $H = G_2$,
7. $m = 8$, $H = Spin(7)$,
8. $m = 16$, $H = Spin(9)$.

C. Olmos [Annals of Math., 2005] dio una demostración geométrica de este teorema.

Propiedades cohomológicas de las variedades compactas Kähler

- Si M es compacta Kähler $\implies \; b_{2k+1}(M) \equiv 0 \pmod 2$.

Teorema (Hard Lefschetz)

Sea M^{2n} una variedad compacta Kähler con forma de Kähler ω. Entonces, para cada $j = 0, 1, \ldots, n$, la aplicación

$$L_\omega{}^j : H^{n-j}(M) \to H^{n+j}(M)$$

es un isomorfismo, donde $L_\omega([\gamma]) = [\omega \wedge \gamma]$.

Algunos resultados sobre nilvariedades

Una nilvariedad [Mal'cev, 1949] es un cociente $\Gamma\backslash G$ de un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo G por un retículo Γ (i.e., un subgrupo discreto co-compacto).

- G posee retículos $\iff$ $\mathfrak{g}$ tiene una base respecto de la cual las constantes de estructura son racionales.

$$\{\text{ retículos en } G\} \longleftrightarrow \{\text{ formas racionales de } \mathfrak{g}\}$$

Thurston (1976) describió el primer ejemplo de variedad simpléctica no Kähler: la nilvariedad $S^1 \times \Gamma_1\backslash H_3$, donde

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

es el grupo de Heisenberg de dimensión 3 y Γ_1 es el subgrupo de matrices en H_3 con coeficientes enteros.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ se define el siguiente retículo Γ_k en H_3:

$$\Gamma_k = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c/k \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\Gamma_i \subset \Gamma_j \;\text{ si y sólo si }\; i \text{ divide a } j.$$

- $\Gamma_1 \backslash H_3$ es un cubrimiento de $\Gamma_k \backslash H_3$ para todo $k > 1$.
- $\Gamma_k / [\Gamma_k, \Gamma_k] \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_k$.

Las nilvariedades $S^1 \times \Gamma_k \backslash H_3$ tienen grupo fundamental $\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_k$, en particular, son no homeomorfas. Todas son simplécticas no Kähler.

Durante 1983-86, varios autores (Abbena, Cordero, Fernández, Gray, de León, entre otros) obtuvieron familias de variedades simplécticas no Kähler generalizando el ejemplo anterior.

Teorema (Ch. Benson-C. Gordon, 1988)

Si $N = \Gamma\backslash G$ es una nilvariedad Kähler, entonces G es abeliano y N es difeomorfa a un toro.

- La cohomología de de Rham de $\Gamma\backslash G$ se identifica con la cohomología de $\mathfrak{g}$ (Teorema de Nomizu).
- Benson-Gordon muestran que si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, Hard Lefschetz implica $\mathfrak{g}$ abeliana.

Más precisamente, Benson-Gordon muestran que si $\mathfrak{g}$ es nilpotente y no abeliana, la aplicación

$$L_\omega{}^{n-1} : H^1(\mathfrak{g}) \to H^{2n-1}(\mathfrak{g})$$

no es suryectiva.

En un trabajo reciente (en colaboración con I. Dotti y M. Verbitsky) demostramos un resultado análogo al de Benson-Gordon para nilvariedades hiper-Kähler con torsión (HKT).

Una estructura *hiperhermitiana* en una variedad M es $(\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2,3}, g)$, donde

1. $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2,3}$ son estructuras complejas tales que
$$J_1 J_2 = -J_2 J_1 = J_3,$$
2. g es una métrica Riemanniana tal que $g(J_\alpha X, J_\alpha Y) = g(X, Y),\ \alpha = 1, 2, 3,\ \ X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Métricas hiper-Kähler con torsión

Dada una estructura hiperhermitiana $(\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2,3}, g)$ en M, considerar la siguiente 2-forma Ω en M:

$$\Omega = \omega_2 + i\omega_3$$

- Ω es de tipo $(2,0)$ con respecto a J_1.

Sea $\partial : \Lambda^{2,0}_{J_1}(M) \to \Lambda^{3,0}_{J_1}(M)$ el operador de Dolbeault en (M, J_1).

g se dice *hiper-Kähler con torsión* (HKT) si

$$\partial(\Omega) = 0.$$

Estas métricas fueron introducidas por P.S. Howe - G.Papadopoulos (1996).

Si $(M, \{J_\alpha\}_{\alpha=1,2,3}, g)$ es hiperhermitiana, g es HKT si y sólo si existe una conexión ∇ en M que satisface

1. $\nabla g = 0, \quad \nabla J_\alpha = 0, \alpha = 1, 2, 3,$
2. el tensor $c(X, Y, Z) = g(X, T(Y, Z))$ es antisimétrico, donde T es la torsión de ∇.

- Si tal ∇ existe, es única.
- La estructura HKT se dice *fuerte* o *débil* dependiendo de que c sea cerrada o no.

- Una estructura compleja J (resp. métrica) en un grupo de Lie G se dice **invariante a izquierda** si las traslaciones a izquierda L_x, $x \in G$, son difeomorfismos holomorfos (resp. isometrías).

La misma definición se aplica al caso de estructuras hipercomplejas, hiperhermitianas y HKT en G.

- Si $N = \Gamma\backslash G$ es una nilvariedad y G tiene estructura invariante a izquierda (compleja, hipercompleja, hiperhermitiana, HKT), N hereda dicha estructura. Cuando nos referimos a una nilvariedad compleja (hipercompleja, hiperhermitiana, HKT) se sobreentiende que la correspondiente estructura está inducida por una invariante a izquierda en G.

Una métrica hiperhermitiana inv. a izq. en un grupo de Lie G es HKT si y sólo si

$$\begin{aligned}
&g([J_1X, J_1Y], Z) + g([J_1Y, J_1Z], X) + g([J_1Z, J_1X], Y)\\
&= g([J_2X, J_2Y], Z) + g([J_2Y, J_2Z], X) + g([J_2Z, J_2X], Y)\\
&= g([J_3X, J_3Y], Z) + g([J_3Y, J_3Z], X) + g([J_3Z, J_3X], Y).
\end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, el álgebra de Lie de G.

Una estructura compleja (resp. hipercompleja) inv. a izq. se dice *abeliana* cuando $[JX, JY] = [X, Y]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ (resp. $[J_\alpha X, J_\alpha Y] = [X, Y]$, $\alpha = 1, 2, 3$).

Dada una estructura hipercompleja abeliana, cualquier métrica hiperhermitiana es HKT (y siempre resulta débil).

Familias de estructuras HKT fuertes:

- Grupos de Lie reductivos con factor semisimple compacto [Grantcharov-Poon, 2000].
- Construcción de nuevos ejemplos a partir de representaciones cuaterniónicas de grupos de Lie compactos [B -Fino, 2008].

Hay obstrucciones para la existencia de estructuras complejas abelianas en un álgebra de Lie. Por ejemplo:

- Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie que admite estructura compleja abeliana, entonces $\mathfrak{g}$ es 2-pasos soluble [Petravchuk, 1988].

Una estructura compleja J inv. a izq. en G induce una descomposición

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{0,1},$$

donde $\mathfrak{g}^{1,0}$, $\mathfrak{g}^{0,1}$ son los autoespacios de J en $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

- J es abeliana $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{g}^{1,0}$ es una subálgebra abeliana de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Teorema (Dotti - Fino, 2002)

Si G es un grupo de Lie 2-pasos nilpotente Lie con una estructura HKT $(\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2,3}, g)$ invariante a izquierda, entonces $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2,3}$ es abeliana.

- **Problema**. ¿El resultado anterior vale para un grupo de Lie nilpotente arbitrario?

Un resultado para nilvariedades HKT

Teorema (B - I. Dotti - M. Verbitsky, 2007)

Sea $(N, \{J_\alpha\}_{\alpha=1,2,3}, g)$ *una nilvariedad HKT. Entonces* $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2,3}$ *es abeliana.*

El primer paso en la prueba del teorema es demostrar el siguiente análogo del Teorema de Hard Lefschetz para la cohomología de Dolbeault de una nilvariedad HKT:

- Sea $(N^{4n}, \{J_\alpha\}_{\alpha=1,2,3}, g)$ una nilvariedad HKT y Ω la correspondiente $(2,0)$-form en (N, J_1). Entonces, para cada $j = 0, 1, \ldots, 2n$:

$$L_\Omega^j : H_\partial^{2n-j,0}(N, J_1) \to H_\partial^{2n+j,0}(N, J_1)$$

es un isomorfismo, donde $L_\Omega([\gamma]) = [\Omega \wedge \gamma]$.

El objetivo es demostrar que $\mathfrak{g}^{1,0}$ es abeliana (esto equivale a J_1 abeliana).

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{1,0}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, J_1) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & \Lambda^{2,0}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, J_1) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & \Lambda^{2n,0}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, J_1) \arrow[d] \\
\Lambda^1\mathfrak{g}^{1,0} \arrow[r, "d"] & \Lambda^2\mathfrak{g}^{1,0} \arrow[r, "d"] & \cdots \arrow[r, "d"] & \Lambda^{2n}\mathfrak{g}^{1,0}
\end{tikzcd}$$

$\mathfrak{g}^{1,0}$ es nilpotente. Si fuera no abeliana, el mismo argumento de Benson-Gordon aplicado a la fila inferior del diagrama anterior daría que

$$L_{\Omega}^{n-1} : H^1(\mathfrak{g}^{1,0}) \to H^{2n-1}(\mathfrak{g}^{1,0}) \text{ no es suryectiva.}$$

Lo anterior equivale a

$$L_{\Omega}^{n-1} : H_{\partial}^{1,0}(N, J_1) \to H_{\partial}^{2n-1,0}(N, J_1) \text{ no es suryectiva,}$$

lo cual contradice Hard Lefschetz.

- El teorema responde en forma parcial la pregunta planteada anteriormente, en el caso de grupos de Lie nilpotentes que admiten retículos.
- Dada una estructura hipercompleja arbitraria en M compacta, ¿es siempre posible encontrar una métrica HKT compatible? [Grantcharov-Poon, 2000]
- No: Fino-Grantcharov (2004) exhibieron una familia de nilvariedades 2-pasos nilpotentes con estructura hipercompleja no abeliana (Dotti-Fino, 2003).
- Exhibimos a continuación una familia de nilvariedades hipercomplejas k-pasos nilpotentes (k arbitrario) que no admiten métricas HKT.

Una familia de ejemplos

Sea A un álgebra asociativa de dimensión finita y $\mathfrak{aff}(A)$ el álgebra de Lie $A \oplus A$ con corchete:

$$[(a, b), (a', b')] = (aa' - a'a, ab' - a'b), \qquad a, b, a', b' \in A.$$

Estas álgebras de Lie han sido consideradas en trabajos anteriores [B -Dotti, 2004].

- $\mathfrak{aff}(A)$ es nilpotente como álgebra de Lie $\Longleftrightarrow$ A es nilpotente como álgebra asociativa.
- Si A es conmutativa $\Longrightarrow$ $\mathfrak{aff}(A)$ es 2-pasos soluble.

Sea J_1 el endomorfismo de $\mathfrak{aff}(A)$ definido por:

$$J_1(a, b) = (b, -a), \qquad a, b \in A.$$

Se puede mostrar que J_1 define una estructura compleja en $\mathfrak{aff}(A)$.

Si, además, A es un álgebra asociativa **compleja**, podemos definir J_2 en $\mathfrak{aff}(A)$ por:

$$J_2(a, b) = (-ia, ib), \qquad a, b \in A.$$

Como J_2 también es una estructura compleja y $J_1 J_2 = -J_2 J_1$, definiendo $J_3 = J_1 J_2$ se obtiene una estructura **hipercompleja** en $\mathfrak{aff}(A)$.

Observación. $\{J_\alpha\}_{\alpha=1,2,3}$ es abeliana $\iff$ A es conmutativa.

Una familia de ejemplos

Sea T_k el álgebra de matrices $(k+1) \times (k+1)$ estrictamente triangulares superiores con coeficientes complejos.

Considerar el grupo de Lie simplemente conexo $\mathrm{Aff}(T_k)$ con álgebra de Lie $\mathfrak{aff}(T_k)$, que es k-pasos nilpotente.

Las constantes de estructura con respecto a la base canónica de $\mathfrak{aff}(T_k)$ son enteros, por lo tanto existe un retículo Γ_k en $\mathrm{Aff}(T_k)$ y resulta:

- La nilvariedad hipercompleja $N_k = \Gamma_k \backslash \mathrm{Aff}(T_k)$ no posee métrica HKT.