

## Matemática I (B) — Verano 2022

### Práctica 6 — Extremos de funciones en varias variables

**Sugerencia I.** A lo largo de esta práctica estudiaremos los extremos de funciones de varias variables. Cuando sea posible, grafique la función en cuestión para corroborar el resultado obtenido analíticamente.

**Sugerencia II.** Al realizar cada ejercicio procure, de ser posible, reutilizar cálculos de ejercicios anteriores.

- Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones, y para cada uno de ellos, analice si la función tiene un máximo local, un mínimo local, o un punto de ensilladura.

$$a) f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$$

$$b) f(x, y) = e^{1+x^2+y^2}$$

$$c) f(x, y) = \ln\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right)$$

$$d) f(x, y) = (x+1)^2 - y^2$$

$$e) f(x, y) = xy + 2x - 3y + 3$$

$$f) f(x, y) = -x^3 - y^3 + 3xy$$

$$g) f(x, y, z) = xy + z^2$$

$$h) f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + z$$

- Sea  $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - 3yx^2$ .
  - Muestre que  $(0, 0)$  es punto crítico de  $f$  y calcule el Hessiano en dicho punto.
  - Muestre que  $f$  tiene un mínimo relativo en  $(0, 0)$  sobre cada recta que pase por  $(0, 0)$ , es decir, si  $\sigma(t) = (at, bt)$  entonces  $f \circ \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de  $a, b$ .
  - Muestre que  $f$  tiene un máximo relativo en  $(0, 0)$  sobre la curva  $\sigma(t) = (t, \frac{3}{2}t^2)$ , es decir,  $f \circ \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un máximo relativo en 0. Deduzca que el origen es punto silla de  $f$ .
- Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ .
  - Verifique  $(0, 0)$  es un punto crítico de  $f$  pero que la función no tiene un extremo relativo en dicho punto.
  - Calcule todos los extremos relativos de  $f$ , y clasifíquelos.
  - Verifique gráficamente lo obtenido.

- Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(0, 1) = 0, \quad \nabla f(0, 1) = (0, 2) \quad \text{y} \quad Hf(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x, y) = 3x^2y + e^{f(x, y)} - 2y$ .

- a) Calcule  $\nabla g(0,1)$  y  $Hg(0,1)$   
 b) ¿Tiene  $g$  un extremo relativo en  $(0,1)$ ?

5. Decida si existen o no números reales  $a$  tales que la función

$$f(x,y) = e^{4y-x^2} + a(x-y) + 9(x-2)(y-1)$$

tenga un mínimo relativo en el punto  $(2,1)$ .

6. Determine los extremos relativos de  $f$  restringida a  $A$  en los siguientes casos:

- a)  $f(x,y) = x \cos(y)$ ,  
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2\pi\}$   
 b)  $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$ ,  
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

7. Encuentre el punto de la parábola  $y^2 = 4x$  cuya distancia al  $(1,0)$  es mínima.

- a) Parametrizando la parábola, para reducir el problema a una función de una variable.  
 b) Usando multiplicadores de Lagrange.

8. Considere la función  $f(x,y) = 2x + y$  y el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 3\}.$$

- a) Grafique el conjunto  $A$  junto con las curvas de nivel  $f(x,y) = c$ , para algunos valores de  $c$ .  
 b) Halle los extremos relativos de  $f$  restringida al conjunto  $A$ . ¿Tiene  $f$  máximos y/o mínimos absolutos?  
 c) Repita el análisis para el conjunto

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 3, x > 0\}.$$

9. Considere la función  $f(x,y) = x^3y$ .

- a) Busque los puntos  $(x,y)$  del primer cuadrante donde es máxima y mínima la función  $f$ , sujeta a la restricción  $2x + 3y = 6$ .  
 b) Busque los puntos  $(x,y)$  donde es máxima y mínima la función  $f$ , sujeta a la restricción  $3x^2 + y^2 = 1$ .  
 c) Busque los puntos  $(x,y)$  del primer cuadrante donde es máxima y mínima la función  $f$ , sujeta a la restricción  $3x^2 + y^2 = 1$ .

*Nota:* el primer cuadrante incluye los semiejes  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ .

En todos los casos dibuje en el plano la restricción y algunas curvas de nivel de  $f$ , entre ellas la curva de nivel que es tangente a la restricción.

10. Determine los extremos absolutos de  $f$  restringida a  $A$  en los siguientes casos:

a)  $f(x, y) = x^2 + y^2,$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 = 9\}$$

b)  $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1,$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

c)  $f(x, y, z) = x^2 - y^2,$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

d)  $f(x, y, z) = x - y + z,$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$$

11. Encuentre los puntos de las siguientes superficies más cercanos al origen.

a)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

b)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 7\}$

12. La temperatura de una placa en un punto cualquiera  $(x, y)$  viene dada por la función  $T(x, y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$ . Una alarma térmica, situada sobre los puntos de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 25$ , se dispara a temperaturas superiores a 180 grados o inferiores a 20 grados. ¿Se disparará la alarma?

13. Considere una especie de mariposa que a lo sumo pone huevos dos veces en su vida, y que en cada ocasión pone 3 huevos. La aptitud de cada huevo depende de su tamaño  $t$ , y está dada por  $h(t) = \frac{2t}{5+t}$ .

Se asume que los huevos de cada nidada tienen todos el mismo tamaño, y se nota con  $x$  al tamaño de cada huevo de la primera nidada y con  $y$  al tamaño de cada huevo de la segunda.

Si la probabilidad de que la hembra sobreviva hasta poner su primera nidada es de  $1/2$ , y la probabilidad de que sobreviva hasta la segunda es de  $1/8$ , se describe entonces la aptitud reproductiva de la mariposa por medio de la función:

$$f(x, y) = \frac{3}{2}h(x) + \frac{3}{8}h(y).$$

Halle el tamaño de huevo óptimo de las dos nidadas para maximizar la aptitud reproductiva, sabiendo que los recursos disponibles para la reproducción están restringidos por la ecuación

$$x + y = 11.$$

14. Determine los extremos absolutos de

$$f(x, y) = xy(15 - 5y - 3x).$$

en la región triangular limitada por la recta  $5y + 3x = 15$  y los ejes  $x$  e  $y$ .

15. Determine los extremos absolutos de  $f$  restringida a  $A$  en los siguientes casos:

a)  $f(x, y) = x \cos(y),$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\pi\}$$

b)  $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x,$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3\}$$

c)  $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3,$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

d)  $f(x, y) = x^2 + y^2,$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 \leq 9\}$$

e)  $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1,$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

f)  $f(x, y, z) = x^2 - y^2,$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

16. Tres alelos  $A, B$  y  $O$  determinan los cuatro grupos sanguíneos:  $A$  ( $AA$  o  $AO$ ),  $B$  ( $BB$  o  $BO$ ),  $O$  ( $OO$ ) y  $AB$  ( $AB$ ). La ley de Hardy-Weinberg establece que la proporción de individuos que lleva dos alelos diferentes es

$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

donde  $p, q$  y  $r$  son las proporciones de  $A, B$  y  $O$  en la población. Use el hecho de que  $p + q + r = 1$  para mostrar que  $P$  vale a lo sumo  $\frac{2}{3}$ .

17. Considere una comunidad formada por tres especies cuyas proporciones relativas son  $p_1, p_2$  y  $p_3$  respectivamente. La diversidad de la comunidad se suele medir con el índice de Shannon-Weaver

$$H(p_1, p_2, p_3) = -p_1 \ln(p_1) - p_2 \ln(p_2) - p_3 \ln(p_3)$$

donde  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ .

Usando que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ , observe que  $H$  se puede definir cuando  $p_1 = 0$  como

$$H(0, p_2, p_3) = -p_2 \ln(p_2) - p_3 \ln(p_3)$$

para  $p_2 > 0$  y  $p_3 > 0$ , y  $H(0, 1, 0) = H(0, 0, 1) = 0$ . Análogamente, se puede definir cuando  $p_2 = 0$  o  $p_3 = 0$ .

Muestre que  $H$  alcanza un máximo absoluto cuando  $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$ .