Matemática I (B) — Verano 2022

Práctica 2 — Sistemas lineales y matrices

1. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas lineales. Cuando el sistema sea compatible, describa el conjunto de *todas* las soluciones.

a) $\begin{cases} x+2y+z &= 3 \\ x-2y+z &= 3 \\ 2x+y-z &= 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+(2-i)y &= 1-i \\ (2+i)x+6y &= 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+(-1+i)y &= 3 \\ -x+y+5iz &= 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-2y+2z &= -4i \\ ix-(1+i)y &= 2 \\ x+2iy-2z &= 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-2y+2z &= -4i \\ ix-(1+i)y &= 2 \\ x+2iy-2z &= 1 \end{cases}$

Para cada uno de los sistemas lineales $Ax = b$ anteriores, calcule el rango de la matriz A y el rango de la matriz ampliada $(A|b)$. En términos de la compatibilidad, ¿qué observa? ¿Cómo son las soluciones del sistema homogéneo asociado en cada uno de los casos?

2. En cada uno de los siguientes casos, decida si C es inversible calculando su determinante. En caso afirmativo, calcule su inversa.

a) $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$

b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} i & -i & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & i & -i \end{pmatrix}$

d) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

e) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3. Interprete geométricamente la operación Av para $v \in \mathbb{R}^2$ cualquiera y A una de las siguientes matrices.

Sugerencia: comience con $v = (1,0)$ y $v = (0,1)$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

e) $A = \frac{r}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, con $r > 0$

f) $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$

Observe que si A es la matriz del item *f)* y $c, d \in \mathbb{R}$, entonces

$$A\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re\left((a+bi)(c+di)\right) \\ Im\left((a+bi)(c+di)\right) \end{pmatrix}.$$

4. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Halle todos los $v \in \mathbb{R}^3$ tales que

a) $Av = v$ *b*) $Av = -2v$ *c*) $Av = 3v$

5. Halle los autovalores en $\mathbb{C}$ cada una de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Determine si cada una de las matrices A del Ejercicio 5 es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

a) En los casos en que lo sea, halle una matriz inversible C con coeficientes reales que diagonalice a A (es decir, tal que $C^{-1}\,A\,C$ sea diagonal).

b) En los restantes casos, determine si la matriz es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$, y en ese caso halle una matriz inversible C con coeficientes complejos que la diagonalice.

7. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Calcule A^{100} y B^{87}.

b) Halle, si es posible, una matriz $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $M^2 = A$.

c) Halle, si es posible, una matriz $N \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $N^2 = B$.

8. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Verifique que A tiene autovalores i y $-i$.

b) Verifique que si $w \in \mathbb{C}^2$ es un autovector de A de autovalor i, si escribimos $w = u + iv$ con $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

c) Concluya que

$$A \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 & u_1 \\ -v_2 & u_2 \end{pmatrix}.$$

d) Halle $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible tal que $R^{-1}\, A\, R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

e) Calcule A^{21}.

9. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

y sea $v = (-2, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$.

a) Halle los autovalores de A y los autovectores asociados. ¿Es A diagonalizable sobre $\mathbb{C}$?

b) Escriba al vector v como suma de autovectores de A.

c) Calcule $A^{63}\, v$.

10. En cada caso, escriba a v como suma de autovectores de A. Utilizando lo obtenido, decida si existe $\lim_{n\to\infty} A^n v$.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}$, $\quad v = (2, -3)$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & -3/2 \end{pmatrix}$, $\quad v = (0, 1)$

11. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -8 & 5 & -4 \\ -8 & 8 & k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Sabiendo que A tiene un autovalor igual a 1, hallar k. ¿Es A diagonalizable sobre $\mathbb{R}$?

12. Una población en estudio está distribuida en un territorio dividido en dos sectores. El tamaño de esta población es constante y se desplaza. En el momento inicial, exactamente la mitad de la población está en cada sector. Al día siguiente se observa que el 75 % de la población del Sector 1 se ha desplazado al Sector 2, mientras que 1 de cada 10 especímenes que estaban en el Sector 2 pasó al Sector 1. Esta pauta de desplazamiento se mantiene a lo largo del tiempo.

a) Si se denota por $S_1(t)$ al tamaño de la población en el Sector 1 y $S_2(t)$ al tamaño de la población en el Sector 2 en el día t, verifique que la dinámica se puede representar en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} S_1(t+1) \\ S_2(t+1) \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} S_1(0) \\ S_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

donde $M = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/10 \\ 3/4 & 9/10 \end{pmatrix}$.

b) Calcule $S_1(3)$ y $S_2(3)$.

c) Verifique que para todo $t \geq 0$

$$\begin{pmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{pmatrix} = M^t \cdot \begin{pmatrix} S_1(0) \\ S_2(0) \end{pmatrix}.$$

d) Un *estado de equilibrio* del sistema es un vector v (que describe una distribución de la población) tal que $Mv = v$. Halle los estados de equilibrio del sistema.

e) Verifique que $(S_1(t), S_2(t))$ tiende a un estado de equilibrio cuando $t \to \infty$. ¿Qué sucede para otras distribuciones de población iniciales?

13. Dos sustancias, S_1 y S_2, reaccionan convirtiéndose una en la otra. A tiempo $t+1$, la concentración de la sustancia S_1 será una proporción α de esta a tiempo t, más una proporción β de S_2 a tiempo t. Es decir, $S_1(t+1) = \alpha S_1(t) + \beta S_2(t)$. Análogamente, $S_2(t+1) = \gamma S_1(t) + \delta S_2(t)$. La dinámica está representada por

$$\begin{pmatrix} S_1(t+1) \\ S_2(t+1) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \text{donde } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

y está determinada por la concentración inicial $(S_1(0), S_2(0))$.

Un *estado de equilibrio* del sistema es un vector de concentraciones v tal que $Av = v$.

a) Muestre que $v = (0,0)$ siempre es un estado de equilibrio del sistema.

b) Muestre que si $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$ entonces, independientemente de la concentración inicial, se tiene

$$\lim_{t \to +\infty} (S_1(t), S_2(t)) = (0,0).$$

Es decir, $(0,0)$ es un *equilibrio estable*.

c) Para $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,9 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix}$, demuestre que ambas concentraciones se hacen arbitrariamente grandes cuando $t \to \infty$ si la concentración inicial es $(3, 2)$.

d) Si $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$, ¿cuáles son los estados de equilibrio del sistema?

14. Se considera una población de hembras con edades e_0 (jóvenes) y e_1 (adultas), donde solo un 25 % de las hembras de la edad e_0 sobrevive a la edad e_1, y el promedio de hijas que sobreviven hasta el final de la temporada de reproducción es de 2 por cada hembra de la edad e_0 y 5 para las hembras de la edad e_1.

Si se nota con $N_i(t)$ al número de hembras de la edad e_i en el tiempo t, para $t = 0, 1, 2, \ldots$, la dinámica se puede representar en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} N_0(t+1) \\ N_1(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \end{pmatrix}.$$

Denotemos por L a la matriz que describe la dinámica.

a) Calcule los autovalores y autovectores correspondientes de la matriz L.

Si un vector (v_0, v_1) de coordenadas no negativas es un autovector de L de autovalor positivo, diremos que es una *distribución estable de edades*.

b) Muestre que las proporciones

$$\frac{N_0(t)}{N_0(t) + N_1(t)} \quad \text{y} \quad \frac{N_1(t)}{N_0(t) + N_1(t)}$$

valen lo mismo para todo t si el estado inicial $(N_0(0), N_1(0))$ es una distribución estable de edades.

c) Sea (v_0, v_1) una distribución estable de edades. Muestre que para un estado inicial *cualquiera* se verifica

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N_0(t)}{N_0(t) + N_1(t)} = \frac{v_0}{v_0 + v_1}, \quad \lim_{t \to \infty} \frac{N_1(t)}{N_0(t) + N_1(t)} = \frac{v_1}{v_0 + v_1}.$$

Este es un ejemplo de un modelo para describir el crecimiento de poblaciones, típicamente de hembras, que considera un agrupamiento por edades con diferentes tasas de fertilidad. Fue elaborado por P. H. Leslie en 1945. Debido a esto, a las matrices que describen la dinámica de estos modelos se las llama *matrices de Leslie*.

d) Considere ahora una población con edades e_0, e_1 y e_2, donde solo un 50 % de las hembras de edad e_0 sobrevive a la edad e_1, solo un 25 % de las hembras de edad e_1 sobrevive a la edad e_2, y el promedio de hijas que sobreviven hasta el final de la temporada de reproducción es de 4 por cada hembra de la edad e_1, y 3 para las hembras de la edad e_2.

Describa en forma matricial la dinámica del sistema y halle una distribución estable de edades.