

Probabilidad y Estadística (C)
10 de febrero de 2020

1. Considere la función

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2\alpha x + 1}{2} & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

(a) Hallar los $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que f_X sea la densidad de una variable aleatoria continua X .

(b) Para $\alpha = 1/2$:

1) Calcular $P(X > 0)$, $P(0 < X < 1)$, $P(X < 0 | -1/2 < X < 1/2)$.

2) Determinar la media, la mediana y la varianza de X .

2. Medimos con cierto error el diámetro de un círculo, de modo que el diámetro es un punto del intervalo $[a, b]$ elegido con una distribución uniforme. Describir la distribución de probabilidades del área del círculo, su esperanza y varianza.

3. (El coleccionista de cupones) Estimar cuántas figuritas hace falta comprar para llenar un álbum de N de ellas, si suponemos que todas son igual de probables.

Sugerencia: Considerar las variables X_i que representan la cantidad de figuritas que hay que comprar para obtener una nueva, si ya se tienen i figuritas diferentes.

4. (El análisis de sangre de Feller) Se hace un análisis de sangre sobre un gran número N de personas, para testear la presencia de una enfermedad. El test puede hacerse de dos formas:

(a) Se realiza un test para cada persona por separado, realizando así N tests.

(b) Se mezclan muestras de k personas. Si el test da negativo para la mezcla, todas las personas están sanas. Si no, hay al menos una enferma y en ese caso realizamos un test para cada persona. De esta forma, pueden realizarse o 1 o $k + 1$ tests para cada grupo.

Supongamos que la probabilidad de que una persona elegida al azar esté enferma es de p .

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el test de negativo para un grupo de k de ellas?

(b) ¿Cuántos tests haremos en promedio si utilizamos el segundo método con grupos de k personas?

(c) Para p pequeño, hallar k que minimice la cantidad de tests a realizar.

Sugerencia: Como p es pequeño, se puede aproximar $(1 - p)^k$ por su Taylor en 0.