

Matemática I (B)

Práctica 6 — Extremos de funciones en varias variables

Sugerencia I. A lo largo de esta práctica estudiaremos los extremos de funciones de varias variables. Cuando sea posible, grafique la función en cuestión para corroborar el resultado obtenido analíticamente.

Sugerencia II. Al realizar cada ejercicio procure, de ser posible, reutilizar cálculos de ejercicios anteriores.

1. Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones, y para cada uno de ellos, analice si la función tiene un máximo local, un mínimo local, o un punto de ensilladura.

a) $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$

e) $f(x, y) = xy + 2x - 3y + 3$

b) $f(x, y) = e^{1+x^2+y^2}$

f) $f(x, y) = -x^3 - y^3 + 3xy$

c) $f(x, y) = \ln\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right)$

g) $f(x, y, z) = xy + z^2$

d) $f(x, y) = (x + 1)^2 - y^2$

h) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + z$

2. Sea $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - 3yx^2$.

- a) Muestre que $(0, 0)$ es punto crítico de f y calcule el Hessiano en dicho punto.
- b) Muestre que f tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$ sobre cada recta que pase por $(0, 0)$, es decir, si $\sigma(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a, b .
- c) Muestre que f tiene un máximo relativo en $(0, 0)$ sobre la curva $\sigma(t) = (t, \frac{3}{2}t^2)$, es decir, $f \circ \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un máximo relativo en 0. Deduzca que el origen es punto silla de f .

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

- a) Verifique $(0, 0)$ es un punto crítico de f pero que la función no tiene un extremo relativo en dicho punto.
- b) Calcule todos los extremos relativos de f , y clasifíquelos.
- c) Verifique gráficamente lo obtenido.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(0, 1) = 0, \quad \nabla f(0, 1) = (0, 2) \quad \text{y} \quad Hf(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = 3x^2y + e^{f(x, y)} - 2y$.

- a) Calcule $\nabla g(0,1)$ y $Hg(0,1)$
- b) ¿Tiene g un extremo relativo en $(0,1)$?
5. Decida si existen o no números reales a tales que la función
- $$f(x,y) = e^{4y-x^2} + a(x-y) + 9(x-2)(y-1)$$
- tenga un mínimo relativo en el punto $(2,1)$.
6. Determine los extremos relativos de f restringida a A en los siguientes casos:
- a) $f(x,y) = x \cos(y)$,
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2\pi\}$
- b) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$,
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$
7. Encuentre el punto de la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia al $(1,0)$ es mínima.
- a) Parametrizando la parábola, para reducir el problema a una función de una variable.
- b) Usando multiplicadores de Lagrange.
8. Considere la función $f(x,y) = 2x + y$ y el conjunto
- $$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 3\}.$$
- a) Grafique el conjunto A junto con las curvas de nivel $f(x,y) = c$, para algunos valores de c .
- b) Halle los extremos relativos de f restringida al conjunto A . ¿Tiene f máximos y/o mínimos absolutos?
- c) Repita el análisis para el conjunto
- $$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 3, x > 0\}.$$
9. Considere la función $f(x,y) = x^3y$.
- a) Busque los puntos (x,y) del primer cuadrante donde es máxima y mínima la función f , sujeta a la restricción $2x + 3y = 6$.
- b) Busque los puntos (x,y) donde es máxima y mínima la función f , sujeta a la restricción $3x^2 + y^2 = 1$.
- c) Busque los puntos (x,y) del primer cuadrante donde es máxima y mínima la función f , sujeta a la restricción $3x^2 + y^2 = 1$.

Nota: el primer cuadrante incluye los semiejes $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

En todos los casos dibuje en el plano la restricción y algunas curvas de nivel de f , entre ellas la curva de nivel que es tangente a la restricción.

10. Determine los extremos absolutos de f restringida a A en los siguientes casos:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2,$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 = 9\}$$

b) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1,$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

c) $f(x, y, z) = x^2 - y^2,$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

d) $f(x, y, z) = x - y + z,$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$$

11. Encuentre los puntos de las siguientes superficies más cercanos al origen.

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 7\}$

12. La temperatura de una placa en un punto cualquiera (x, y) viene dada por la función $T(x, y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$. Una alarma térmica, situada sobre los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, se dispara a temperaturas superiores a 180 grados o inferiores a 20 grados. ¿Se disparará la alarma?

13. Considere una especie de mariposa que a lo sumo pone huevos dos veces en su vida, y que en cada ocasión pone 3 huevos. La aptitud de cada huevo depende de su tamaño t , y está dada por $h(t) = \frac{2t}{5+t}$.

Se asume que los huevos de cada nidada tienen todos el mismo tamaño, y se nota con x al tamaño de cada huevo de la primera nidada y con y al tamaño de cada huevo de la segunda.

Si la probabilidad de que la hembra sobreviva hasta poner su primera nidada es de $1/2$, y la probabilidad de que sobreviva hasta la segunda es de $1/8$, se describe entonces la aptitud reproductiva de la mariposa por medio de la función:

$$f(x, y) = \frac{3}{2}h(x) + \frac{3}{8}h(y).$$

Halle el tamaño de huevo óptimo de las dos nidadas para maximizar la aptitud reproductiva, sabiendo que los recursos disponibles para la reproducción están restringidos por la ecuación

$$x + y = 11.$$

14. Determine los extremos absolutos de

$$f(x, y) = xy(15 - 5y - 3x).$$

en la región triangular limitada por la recta $5y + 3x = 15$ y los ejes x e y .

15. Determine los extremos absolutos de f restringida a A en los siguientes casos:

a) $f(x, y) = x \cos(y),$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\pi\}$$

b) $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x,$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3\}$$

c) $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3,$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

d) $f(x, y) = x^2 + y^2,$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 \leq 9\}$$

e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1,$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

f) $f(x, y, z) = x^2 - y^2,$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

16. Tres alelos A , B y O determinan los cuatro grupos sanguíneos: A (AA o AO), B (BB o BO), O (OO) y AB (AB). La ley de Hardy-Weinberg establece que la proporción de individuos que lleva dos alelos diferentes es

$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

donde p , q y r son las proporciones de A , B y O en la población. Use el hecho de que $p + q + r = 1$ para mostrar que P vale a lo sumo $\frac{2}{3}$.

17. Considere una comunidad formada por tres especies cuyas proporciones relativas son p_1 , p_2 y p_3 respectivamente. La diversidad de la comunidad se suele medir con el índice de Shannon-Weaver

$$H(p_1, p_2, p_3) = -p_1 \ln(p_1) - p_2 \ln(p_2) - p_3 \ln(p_3)$$

donde $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Usando que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$, observe que H se puede definir cuando $p_1 = 0$ como

$$H(0, p_2, p_3) = -p_2 \ln(p_2) - p_3 \ln(p_3)$$

para $p_2 > 0$ y $p_3 > 0$, y $H(0, 1, 0) = H(0, 0, 1) = 0$. Análogamente, se puede definir cuando $p_2 = 0$ o $p_3 = 0$.

Muestre que H alcanza un máximo absoluto cuando $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.