# Matemática I (B)

## Práctica 4 — Diferenciación de funciones de 2 y 3 variables

**1.** Sea $f$ la función dada por

$$f(x,y) = x^2(y+2x).$$

*a*) Calcule las derivadas de las funciones $g(x) = f(x,1)$ en $x_0 = 2$ y $h(y) = f(2,y)$ en $y_0 = 1$.

*b*) Calcule las derivadas parciales de $f$ en $(x_0, y_0) = (2,1)$, y compare con lo obtenido en el ítem anterior.

**2.** Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:

*a*) $f(x,y) = \ln(1+3x^2+2y^4)$

*b*) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$

*c*) $g(u,v) = e^u \operatorname{sen}(u^2+v)$

*d*) $g(u,v) = \frac{u^2}{u+v}$

*e*) $f(x,y,z) = x^2z + yz^2 - \frac{x}{y}$

*f*) $f(x,y,z) = e^{x^3+y+7z}$

**3.** La cantidad de encuentros entre presas y predadores está modelada por una función $f$ que depende de la densidad de presas $N$, el tiempo disponible para encontrar la presa $T$, y el tiempo que cada predador manipula cada presa $T_m$. Esta función está dada por

$$f(N,T,T_m) = \frac{b^2N^2T}{1+cN+bT_mN^2},$$

donde $b$ y $c$ son constantes positivas.

*a*) Calcule la tasa de crecimiento de $f(N,T,T_m)$ con respecto a la densidad de presas $N$.

*b*) Calcule los límites para $T$ y $T_m$ fijos:

$$\lim_{N\to+\infty} f(N,T,T_m) \quad \text{y} \quad \lim_{N\to+\infty} \frac{\partial f(N,T,T_m)}{\partial N}.$$

*c*) Grafique $f(N,T,T_m)$ en función de $N$ para $T = 2{,}4$ horas, $T_m = 0{,}2$ horas, $b = 0{,}8$ y $c = 0{,}5$. Interprete en términos del gráfico los resultados obtenidos en los ítems anteriores.

Notar que, como función de $N$, la cantidad de presas es acotada y tiene derivada positiva; así, su gráfico tiene forma *sigmoidea*. ¿Depende esto de los valores fijados?

*d*) Calcule las tasas de crecimiento de $f(N, T, T_m)$ con respecto de $T$ (el tiempo disponible para búsqueda), y respecto de $T_m$ (el tiempo de manipulación de la presa). A partir de lo obtenido analice el crecimiento de $f$ respecto de $T$ y respecto de $T_m$.

**4.** Para las siguientes funciones $f$ halle la ecuación del plano tangente en el punto $P = (x, y, f(x, y))$ indicado y grafique el plano junto a la función cerca del punto en cuestión.

*a*) $f(x, y) = x - 3y, \quad P = (1, 1, -2)$

*b*) $f(x, y) = 2x^3 + y^2, \quad P = (1, 2, 6)$

*c*) $f(x, y) = xy, \quad P = (-1, -2, 2)$

*d*) $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy), \quad P = (1, 0, 0)$

**5.** Para las siguientes superficies dadas en forma implícita halle la ecuación del plano tangente en el punto $P = (x, y, z)$ indicado.

*a*) $x^2 + 2y^2 - z^2 = 5, \quad P = (2, 1, 1)$

*b*) $z - 2x^3 - y^2 = 0, \quad P = (1, 2, 6)$

**6.** Halle el gradiente $\nabla f(P)$ de las siguientes funciones $f$ en los puntos $P$ indicados, siempre que sea posible.

*a*) $f(x, y) = x^2y^3 - y^4, \quad P = (1, 1)$ y $P = (0, 2)$

*b*) $f(x, y) = x \operatorname{sen}(xy), \quad P = (1, 0)$ y $P = (1, \frac{\pi}{2})$

*c*) $f(x, y) = \sqrt{5x - 4y}, \quad P = (5, 4)$ y $P = (x, y)$ cualquiera

*d*) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad P = (2, 3, 6)$ y $P = (x, y, z)$ cualquiera

*e*) $f(x, y, z) = \frac{1}{x+y^3+z^2}, \quad P = (1, -2, 3)$ y $P = (x, y, z)$ cualquiera

Para el primer punto de cada ítem, grafique la curva o superficie de nivel que pasa por ese punto y el gradiente en ese punto. ¿Qué observa?

**7.** Calcule $\nabla f$ y $\sigma'$, y utilícelos para calcular $(f \circ \sigma)'(t)$ en cada uno de los siguientes casos.

*a*) $f(x, y) = 2x^3 + y^2, \quad \sigma(t) = (2 + t^4, 1 - t^3)$

*b*) $f(x, y) = xy, \quad \sigma(t) = (\operatorname{sen}(t), \cos(t))$

*c*) $f(x, y) = xy \operatorname{sen}(xy), \quad \sigma(t) = (t^2, 1 - t)$

**8.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función cuyo plano tangente en el punto $(2, 7, f(2, 7))$ tiene ecuación $z = 6x - 8y + 44$. Sea $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una función tal que

$$\sigma(3) = (2, 7), \quad \sigma'(3) = (5, -4).$$

Si $h = f \circ \sigma$, halle $h'(3)$.

**9.** Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables y sea $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una función derivable tales que

$$\nabla f(1,6) = (2,-1), \quad \nabla g(1,6) = (4,3), \quad \sigma(-7) = (1,6),$$
$$(f \circ \sigma)'(-7) = 2 \quad \text{y} \quad (g \circ \sigma)'(-7) = 3.$$

Calcular $\sigma'(-7)$.

**10.** Sea $f(x,y) = xy^2$, y sea $P = (1,3)$. Considere las curvas

$$\sigma_1(t) = t(1,0) + P, \quad \sigma_2(t) = t(0,1) + P, \quad \sigma_3(t) = t\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + P.$$

*a*) Calcule las derivadas $(f \circ \sigma_i)'(0)$, para $i = 1,2,3$.

*b*) Calcule las derivadas parciales de $f$ en el punto $(1,3)$. Compare con las derivadas calculadas en el ítem *a*) para $i = 1,2$.

*c*) Calcule los productos $\nabla f(1,3) \cdot (1,0)$, $\nabla f(1,3) \cdot (0,1)$ y $\nabla f(1,3) \cdot \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Compare con las derivadas calculadas en el ítem *a*).

**11.** Halle la derivada direccional (o tasa de cambio) de $f$ en el punto $P$, en la dirección indicada en cada caso.

*a*) Por el vector $v$.

I. $f(x,y) = x^2y^3 - y^4, \quad P = (2,1), \quad v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

II. $f(x,y) = x^2y^3 - y^4, \quad P = (2,1), \quad v = (-1,-1)$

III. $f(x,y,z) = yze^{x^2+y+z^3}, \quad P = (1,-2,1), \quad v = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

*b*) Por el ángulo $\theta$ (a partir del eje positivo de las $x$).

I. $f(x,y) = x\,\text{sen}(xy), \quad P = (2,0), \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

II. $f(x,y) = \sqrt{5x-4y}, \quad P = (4,1), \quad \theta = -\frac{\pi}{6}$

*c*) Del punto $P$ hacia el punto $Q$.

I. $f(x,y) = \ln\left(\frac{x^2}{x^2+y} + 1\right), \quad P = (1,1), \quad Q = (2,0)$

II. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad P = (1,2,-2), \quad Q = (-5,8,-5)$

**12.** Sea $f$ una función diferenciable tal que $f(1,2) = 3$, y sean los vectores

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad v_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Se sabe que $\frac{\partial f}{\partial v_1}(1,2) = 3$ y que $\frac{\partial f}{\partial v_2}(1,2) = 4$.

*a*) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

*b*) Encuentre la ecuación del plano tangente al gráfico de $f$ en $(1, 2, f(1, 2))$.

**13.** Halle la tasa de cambio máxima de $f$ en el punto $P$ dado, y la dirección en la que ocurre.

*a*) $f(x, y) = \frac{y^2}{x}, \quad P = (2, 4)$
*b*) $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy), \quad P = (1, 0)$
*c*) $f(x, y, z) = x^2y^3z^4, \quad P = (1, 1, 1)$
*d*) $f(x, y, z) = \ln(1 + xy + z^2), \quad P = (0, 1, -1)$

**14.** Halle un vector unitario que sea normal a la curva o superficie de nivel de la función dada en el punto indicado, y grafique.

*a*) $f(x, y) = 3x + 4y, \quad P = (-1, 1)$
*b*) $f(x, y) = x^2 - y^3, \quad P = (-3, 1)$
*c*) $f(x, y) = xy, \quad P = (2, 3)$
*d*) $f(x, y, z) = \dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9}, \quad P = (-2, 1, -3)$
*e*) $f(x, y, z) = z + 1 - x\,e^y\cos(z), \quad P = (1, 0, 0)$

**15.** La *quimiotaxis* es el fenómeno por el cual ciertos organismos dirigen sus movimientos de acuerdo con la concentración de ciertas sustancias químicas en su medio ambiente. Permite, por ejemplo, que las bacterias encuentren alimento, desplazándose hacia la mayor concentración de moléculas alimentarias, como la glucosa, o que se alejen de sustancias tóxicas.

Supongamos que la concentración de glucosa en un punto $(x, y)$ del plano está dada por

$$f(x, y) = \frac{4}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Si se ubica una bacteria en el punto $P = (3, 1)$, determine en qué dirección se moverá si su respuesta es quimiotáctica.

**16.** La temperatura en un punto del espacio $(x, y, z)$ está dada por

$$T(x, y, z) = 200\,e^{-4x^2-9y^2-4z^2}.$$

*a*) Halle la tasa de cambio de la temperatura en el punto $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ en la dirección hacia el punto $Q = (1, -\frac{1}{6}, 1)$.
*b*) ¿En qué dirección la temperatura disminuye más rápido en $P$? Halle la tasa de cambio mínima en $P$.

**17.** Usted está escalando una montaña cuya forma viene dada por la ecuación $z = 1000 - 0{,}01x^2 - 0{,}02y^2$, y se encuentra en el punto de coordenadas $(50, 80, 847)$. El eje positivo de la variable $x$ apunta hacia el este y el eje positivo de la variable $y$ apunta hacia el norte.

*a*) Si usted camina hacia el sur, ¿estará ascendiendo o descendiendo? ¿A qué tasa? ¿Y si camina hacia el noroeste?

*b*) Si usted viera que en ese momento se desató un tsunami y quisiera comenzar a subir la montaña en la dirección de mayor pendiente. ¿En qué dirección lo haría?