NOMBRE Y APELLIDO:

N^{RO} DE LIBRETA:

1	2	3	4

Calificación

MATEMÁTICA I (B)
Final - 31 de julio de 2019

1. Consideremos una especie estructurada en dos clases: la de los individuos jóvenes, que aún no tienen capacidad reproductiva, y la de los individuos maduros, con capacidad reproductiva. Se observa que cada individuo maduro produce, en promedio, 6 individuos nuevos (jóvenes) en cada período. Asimismo, de una etapa de tiempo a la siguiente, sólo un 25% de los jóvenes sobrevive y se convierte en maduro, mientras que un 50% de los individuos maduros no sobrevive. De este modo, la situación se representa como:

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} \\ M_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_n \\ M_n \end{pmatrix}$$

donde J_n y M_n son las cantidades de individuos jóvenes y adultos respectivamente en la etapa n para cada $n \geq 0$.

Si inicialmente hay 2 individuos jóvenes y 3 individuos maduros, ¿cuántos individuos de cada clase habrá aproximadamente al cabo de 20 períodos?

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable cuyo polinomio de Taylor de orden 2 alrededor del $(2, 0)$ viene dado por $P(x, y) = 3 + (x - 2)^2 + 2y^2$. Sea $g(x, y) = f(x, y) + e^{xy-2y}$.
- a) Calcule $g(2, 0)$ y $\nabla g(2, 0)$.
- b) Muestre que $(2, 0)$ es un mínimo local de g .
3. Halle la solución de la ecuación diferencial

$$x'(t^2 + 1) = 2tx + t$$

que satisface $x(0) = 0$.

4. Si introducimos competencia intraespecífica en la especie de presas x dentro del modelo de Lotka-Volterra obtenemos el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{cases} x' &= 3x - xy - \frac{1}{2}x^2 \\ y' &= -y + \frac{1}{2}xy \end{cases}$$

Halle los puntos de equilibrio del sistema y analice su estabilidad.

Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.