NOMBRE Y APELLIDO:

N^{RO} DE LIBRETA:

1	2	3	4

Calificación

MATEMÁTICA I (B)
Final - 24 de julio de 2019

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Halle, si es posible, una matriz inversible $C \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ y una matriz diagonal $D \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ tales que $A = C.D.C^{-1}$.

b) Calcule A^{10} .

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable cuyo plano tangente en el punto $(1, -2, f(1, -2))$ tiene ecuación $z = 2x - 3y - 12$ y sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función $g(x, y) = xf(x, y) - y^2$.

a) Halle la tasa de cambio de g en el punto $P = (1, -2)$ en la dirección dada por $v = (4, 3)$.

b) Determine la tasa de cambio máxima de g en el punto $P = (1, -2)$.

3. Halle la solución de la ecuación diferencial

$$x' \operatorname{sen}(t) = x \cos(t) + t \operatorname{sen}^2(t)$$

que satisface $x(\pi/2) = 0$.

4. Se estudia la transmisión de una enfermedad en una población de 3 mil individuos. A tiempo t , hay $I(t)$ individuos infectados y $S(t)$ individuos susceptibles de infectarse (contados en miles). La dinámica se describe mediante el siguiente modelo:

$$\begin{cases} S' &= -S.I + 3 - S - I \\ I' &= S.I - I \end{cases}$$

Halle los puntos de equilibrio del sistema y analice su estabilidad.

Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.