APELLIDO Y NOMBRE: TURNO: MAÑANA / NOCHE

N$^{\text{RO}}$ DE LIBRETA:

1	2	3	4

Calificación

MATEMÁTICA I (B)

Segundo parcial - 3 de julio de 2019

---

1. Sea $f(x, y) = xy\, e^{x+y}$.

a) Halle los puntos críticos de f, y en cada uno de ellos, analice si la función tiene un máximo local, un mínimo local, o un punto de ensilladura.

b) Determine los extremos absolutos de f en la región triangular A delimitada por las rectas $x = 0, y = 0$ y $x + y = -4$.

2. Un tanque que contiene inicialmente 100 litros de agua pura recibe una mezcla con 1 gramo de sal por litro de agua, que es bombeada a razón de 3 litros por minuto. Simultáneamente se bombea agua desde el tanque hacia el exterior a una velocidad de 4 litros por minuto.

Note que, en particular, a tiempo t el tanque tiene $100 - t$ litros de agua, por lo que solo consideramos $0 \leq t < 100$.

a) Deduzca una ecuación lineal (no homogénea, a coeficientes no constantes) para la función $S(t)$ que indica la cantidad de sal en el tanque para cada tiempo t.

b) Resuelva dicha ecuación, y halle una fórmula para $S(t)$.

c) Calcule la *concentración* de sal cuando el tanque se vació hasta la mitad.

3. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

a) Halle la solución general del sistema, y determine el conjunto de condiciones iniciales (x_0, y_0) para las cuales se satisface que

$$\lim_{t \to +\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0).$$

b) Haga un bosquejo del diagrama de fases del sistema.

4. Cuando hay dos poblaciones de presas y de predadores que conviven, las razones de crecimiento de éstas dependen de ambas poblaciones. Si al modelo de Lotka-Volterra se le agrega el hecho de que ambas poblaciones tienen un límite para su supervivencia, se obtiene un modelo como el siguiente:

$$\begin{cases} x' = x\,(2 - x - y), \\ y' = y\,(-1 + x - y). \end{cases}$$

Halle todos los puntos de equilibrio de coordenadas no negativas de este sistema de ecuaciones diferenciales, y analice la estabilidad en cada uno de ellos.

Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.