# Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Curso de Verano 2020

## Práctica N° 6: Interpolación.

**Ejercicio 1** Para cada uno de los conjuntos de datos dados, calcular el polinomio $p(x)$ interpolador de grado menor o igual que 3:

a) en la forma de Lagrange,

b) por coeficientes indeterminados,

c) utilizando diferencias divididas.

Verificar los resultados en `Octave`, utilizando el comando **polyfit**. Graficar el polinomio interpolador, usando **polyval**.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | -1 | 0 | 2 | 3 |
| y | -1 | 3 | 11 | 27 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | -3 | 1 | 1 | 3 |

**Ejercicio 2** Agregar a las tablas de datos del Ejercicio 1 el punto $x = 4,\ y = 1$. Calcular los polinomios interpoladores, aumentando las tablas de diferencias divididas.

**Ejercicio 3 Método de Horner** Dado un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. ¿Cuántos productos y cuántas sumas se realizan al evaluar el poliomio en un cierto $x_0$? Horner propone como alternativa escribir a $p$ como $p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + xa_n)))$. ¿Cuántos productos y cuántas sumas se realizan al evaluar $p$ bajo esta forma?

**Ejercicio 4** Interpolar cada una de las siguientes funciones en $n+1$ puntos equiespaciados en el intervalo $[-1,1]$. Graficar simultáneamente la función con sus respectivos interpoladores para $n = 5, 10, 15$.

$$f_1(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \qquad f_2(x) = |x|, \qquad f_3(x) = \operatorname{sen}(\pi x).$$

**Ejercicio 5** Implementar un programa que reciba como input dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$, calcule la tabla de diferencias divididas y devuelva el polinomio que interpola los puntos $(x_i, y_i)$.

**Ejercicio 6** Encontrar una función del tipo $2^{ax^3+bx^2+cx+d}$ que interpole la siguiente tabla de datos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $y$ | 1 | 1 | 0.5 | 4 |

**Ejercicio 7** Hallar y graficar una función del tipo $e^{a_4x^4+a_3x^3+\cdots+a_0}$ que interpole a la función $f(x)=1/x$ en 5 nodos equiespaciados en el intervalo $[1,10]$.

**Ejercicio 8**

a) Dado el intervalo $[a,b]$, sea $m$ el punto medio entre $a$ y $b$ y sea $h \leq (b-a)/2$. Sea $p=m-h$ y $q=m+h$. Demostrar que para todo $x$ en $[a,b]$,

$$|(x-p)(x-q)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

b) Sean $x_0=a,\dots,x_n=b$, $n+1$ puntos en el intervalo $[a,b]$, distribuidos simétricamente respecto del punto medio. Demostrar que para todo $x$ en $[a,b]$ se verifica la desigualdad

$$|(x-x_0)\dots(x-x_n)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

**Ejercicio 9**

a) Sea $t_j=j/n$ con $j=0,\dots,n$, probar que para $t\in[0,1]$ se verifica

$$|(t-t_0)\dots(t-t_n)| \leq \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$$

b) Sean $x_0=a, x_1=a+h,\dots,x_n=b$, donde $h=(b-a)/n$, mostrar que

$$|(x-x_0)\dots(x-x_n)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}(n+1)!}{n^{n+1}}.$$

c) Usar la fórmula de Stirling para obtener una cota de $|(x-x_0)\dots(x-x_n)|$.

**Ejercicio 10** Sea $f$ una función $C^\infty$ tal que para todo $k\in\mathbb{N}$ y para todo $x\in[a,b]$ se tiene:

$$|f^k(x)| \leq C^k k!$$

Mostrar que, si $0<C<\frac{1}{b-a}$ y $P_n$ en un polinomio de grado $n$ que interpola a $f$ en $n+1$ puntos distintos, entonces $P_n$ converge a $f$ uniformemente en $[a,b]$, es decir, $\|f-P_n\|_{\infty,[a,b]}\to 0$ cuando $n$ tiende a $\infty$.

**Ejercicio 11** Sea $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{a+x}$. Sean $(x_n)_{n\geq 0}$ una sucesión arbitraria de puntos en $[-1,1]$ y $P_n(x)$ el polinomio que interpola a $f(x)$ en $x_0,x_1,\dots,x_n$. Demostrar que si $a>3$ entonces $P_n$ converge a $f$ uniformemente en $[-1,1]$.

**Ejercicio 12** Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin(\pi x)+e^x$. Sea $P_n$ el polinomio de grado $n$ que interpola a $f$ en $n+1$ puntos equiespaciados.

a) Usando el Ejercicio 8, acotar el error $\|f-P_n\|_\infty$.

b) Sea $C_n$ la cota hallada en (a). Para $n=1,3,5$, graficar simultáneamente $f$, $f+C_n$, $f-C_n$ y $P_n$.

**Ejercicio 13** Dado un intervalo $[a, b]$, decidir como tienen que estar distribuidos $n+1$ nodos $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ en el intervalo de modo que exista $x \in [a, b]$ tal que

$$|(x - x_0) \ldots (x - x_n)| \sim (b - a)^{n+1}$$

**Ejercicio 14**

a) Hallar $n$ de modo que el polinomio $P_n$ que interpola a la función $f(x) = e^{2x}$ en los ceros de $T_{n+1}$ verifique que $\|f - P_n\|_\infty \leq 10^{-2}$ en $[-1, 1]$.

b) Repetir el ítem anterior para $f(x) = e^x$, $x \in [0, 4]$.

**Ejercicio 15** Para $n = 5, 10, 15$; graficar simultáneamente el polinomio $W_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$, donde $x_i = -1 + 2i/n$, $i = 0, \ldots, n$ y el polinomio de Tchebychev $T_{n+1}$.

**Ejercicio 16** Repetir el Ejercicio 4 usando los polinomios que interpolan a la función $f$ en los ceros del polinomio de Tchebychev de grado $n+1$, para $n = 5, 10, 15$.

**Ejercicio 17** Utilizar el método de coeficientes indeterminados para hallar un polinomio $p$ de grado 2 que satisfaga:

$$p(1) = 0, \quad p'(1) = 7, \quad p(2) = 10.$$

**Ejercicio 18** Para ilustrar qué pasa cuando se desea interpolar no sólo una función sino también sus derivadas, consideramos el problema de hallar $p$ de grado a lo sumo 3 que verifique:

(a) $p(0) = 1, \quad p'(0) = 1, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1;$
(b) $p(-1) = 1, \quad p'(-1) = 1, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1;$
(c) $p(-1) = 1, \quad p'(-1) = -6, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1.$

Usando el método de coeficientes indeterminados, demostrar que el problema (a) tiene solución única, el problema (b) no tiene solución, y el problema (c) tiene infinitas soluciones.

**Ejercicio 19** Analizar para qué valores de $x_0,\ x_1,\ x_2$, y $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2$ existe un polinomio de grado 2 que satisface:

$$p(x_0) = \alpha_0,\ p(x_1) = \alpha_1,\ p'(x_2) = \alpha_2.$$

y cuándo este polinomio es único.

**Ejercicio 20**

a) Sea $f(x) = \cos(\pi x)$, hallar un polinomio de grado menor o igual que 3 que verifique

$$p(-1) = f(-1),\ p(0) = f(0),\ p(1) = f(1),\ p'(1) = f'(1).$$

b) Hallar un polinomio de grado menor o igual que 4 que verifique las condiciones del item anterior, más la condición

$$p''(1) = f''(1).$$

**Ejercicio 21** Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = e^{2x-1}$ y sean $x_0 <\ x_1 < \ldots < x_n$ los ceros del polinomio de Tchebychev, $T_{n+1}$. Se interpola a $f$ con un polinomio $P$ de grado $\leq n+1$ de modo que $P(x_0) = f(x_0),\ P(x_1) = f(x_1), \ldots, P(x_n) = f(x_n)$ y además $P'(x_n) = f'(x_n)$. Probar que si $n \geq 6$ entonces, el error cometido en la interpolación sobre el intervalo $[-1, 1]$ es menor que $10^{-3}$.

**Ejercicio 22** Sea $f \in C^2[a,b]$, y sean $x_0 = a, x_1 = a+h, \ldots, x_n = b$, donde $h = (b-a)/n$. Considerar la poligonal $\ell(x)$ que interpola a $f$ en los puntos $x_i$, $i = 0 \ldots n$.

a) Probar que
$$|f(x) - \ell(x)| \leq \frac{h^2}{2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

b) Para los $x \in [a,b]$ tales que $l$ es derivable, probar que
$$|f'(x) - \ell'(x)| \leq h \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

**Ejercicio 23** Calcular un spline cúbico que interpole los datos: $x = (0, 0.5, 1)$, $y = (0, 1, 0)$. Graficar el spline junto con la función $\operatorname{sen}(\pi x)$.