Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3

Verano 2020

Práctica 3: Teorema de Green.

Ejercicio 1. Verificar el Teorema de Green para el disco D con centro $(0,0)$ y radio R y las siguientes funciones:

(a) $P(x,y) = xy^2, \quad Q(x,y) = -yx^2$.
(b) $P(x,y) = 2y, \quad Q(x,y) = x$.

Ejercicio 2. Verificar el Teorema de Green y calcular $\int_{\mathcal{C}} y^2\,dx + x\,dy$, siendo $\mathcal{C}$ la curva recorrida en sentido positivo:

(a) Cuadrado con vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$.
(b) Elipse dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
(c) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, donde $\mathcal{C}_1 : y = x$, $x \in [0,1]$, y $\mathcal{C}_2 : y = x^2$, $x \in [0,1]$.

Ejercicio 3. Usando el teorema de Green, hallar el área de:

(a) El disco D con centro $(0,0)$ y radio R
(b) La región dentro de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ejercicio 4. Sea D la región encerrada por el eje x y el arco de cicloide:

$$x = \theta - \sin\theta, \ y = 1 - \cos\theta, \ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Usando el teorema de Green, calcular el área de D.

Ejercicio 5. Hallar el área entre las curvas dadas en polares por

$$\begin{array}{lll} r = 1 + \cos\theta & \text{con} & -\pi \le \theta \le \pi, \\ r = \sqrt{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} & \text{con} & -\dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}. \end{array}$$

Ejercicio 6. Probar la fórmula de integración por partes: Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio elemental, ∂D su frontera orientada en sentido antihorario y $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ la normal exterior a D, entonces

$$\int_D u\,v_x\,dx\,dy = -\int_D u_x\,v\,dx\,dy + \int_{\partial D} u\,v\,n_1\,ds,$$

para todo par de funciones u, $v \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$.

Ejercicio 7. Sean P y Q funciones continuamente diferenciables en $\mathbb{R}^2$. Verificar que el Teorema de Green para estas funcionnes es válido cuando la región D es el anillo

$$D = \{(x,y) \,/\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}.$$

Sugerencia: Aplicar el Teorema de Green en los discos de radios 1 y 2.

Ejercicio 8. Sea $\mathcal{C}$ la curva

$$\begin{array}{ll} x = 0, & 0 \le y \le 4, \\ y = 4, & 0 \le x \le 4, \\ y = x, & 0 \le x \le 1, \\ y = 2 - x, & 1 \le x \le 2, \\ y = x - 2, & 2 \le x \le 3, \\ y = 4 - x, & 2 \le x \le 3, \\ y = x, & 2 \le x \le 4, \end{array}$$

orientada positivamente. Calcular
$$\int_{\mathcal{C}} \frac{y}{(x-1)^2+y^2}\,dx + \frac{1-x}{(x-1)^2+y^2}\,dy.$$

Ejercicio 9. Sea $D = \{(x,y)\,/\,1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0\}$. Calcular
$$\int_{\partial D} x^2y\,dx - xy^2\,dy.$$

Como siempre, ∂D está recorrido en sentido directo (el contrario a las agujas del reloj).

Ejercicio 10. Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $F(x,y) = (y+3x, 2y-x)$ al mover una partícula rodeando una vez la elipse $4x^2+y^2 = 4$ en el sentido de las agujas del reloj.

Ejercicio 11. Sea $\mathbf{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$. Calcular $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ donde $\mathcal{C}$ es la circunferencia unitaria centrada en el origen orientada positivamente. Calcular $Q_x - P_y$. ¿Se satisface en este caso el Teorema de Green?

Ejercicio 12. Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada, simple y suave orientada positivamente que encierra la circunferencia unitaria centrada en el origen. Calcular $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ para el campo $\mathbf{F}$ definido en el ejercicio 11.

Ejercicio 13. Calcular $\int_{\mathcal{C}} f_1 dx + f_2 dy$ siendo
$$f_1(x,y) = \frac{x \text{ sen} \dfrac{\pi}{2(x^2+y^2)} - y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_2(x,y) = \frac{y \text{ sen} \dfrac{\pi}{2(x^2+y^2)} + x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$
y
$$\mathcal{C} = \begin{cases} y = x+1 & \text{si } -1 \le x \le 0, \\ y = 1-x & \text{si } \quad 0 \le x \le 1, \end{cases}$$
recorrida del $(-1,0)$ al $(1,0)$.

Ejercicio 14. Determinar todas las circunferencias $\mathcal{C}$ en el plano $\mathbb{R}^2$ sobre las cuales vale la siguiente igualdad
$$\int_{\mathcal{C}} -y^2\,dx + 3x\,dy = 6\pi.$$

Ejercicio 15. Calcular la integral $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ donde
$$\mathbf{F}(x,y) = (y^2e^x + \cos x + (x-y)^2\,,\ 2\,y\,e^x + \operatorname{sen} y),$$
y $\mathcal{C}$ es la curva
$$x^2+y^2 = 1, \quad y \ge 0,$$
orientada de manera tal que comience en $(1,0)$ y termine en $(-1,0)$.

Ejercicio 16. Sean $u,\, v \in C^1(D)$, donde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$. Consideremos los campos definidos por $\mathbf{F}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, $\mathbf{G}(x,y) = (v_x - v_y, u_x - u_y)$. Calcular
$$\iint_D (\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(x,y)\,dx\,dy$$
sabiendo que sobre el borde de D se tiene $u(x,y) = x, \quad v(x,y) = 1$.