| 1 | 2 | 3 | 4 | Calificación |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Apellido y Nombre: Nro. de libreta:
Carrera:

# Análisis II / Análisis Matemático II / Matemática 3
## Verano 2020 - Segundo parcial (12/03/2020)

**Ejercicio 1**
*Considerar la ecuación diferencial*

$$y\cos(xy)\,dx + (x\cos(xy) - \sin(xy)\tan(y))\,dy = 0.$$

*Demuestre que no es exacta, pero se puede convertir en exacta multiplicando por un factor integrante adecuado. Encuentre (implícitamente) todas soluciones de la ecuación.*

**Ejercicio 2**
*Hallar todas las curvas $y = f(x)$ tales que en todo punto $(x_0, y_0)$ se satisface la siguiente condición geométrica: Si $P$ es el punto de intersección de la recta tangente a la curva en $(x_0, y_0)$ con el eje $y$, entonces la distancia de $P$ a $(x_0, y_0)$ coincide con la distancia de $P$ al origen.*

**Ejercicio 3**

*a) Hallar todos los valores de $k$ para que todas las soluciones de la ecuación diferencial*

$$y'' + (k+2)y' + (k+1)y = 0$$

*tiendan a 0 cuando $x \to \infty$.*

*b) Para $k = 1$, resolver el problema con condiciones iniciales*

$$\begin{cases} y'' + (k+2)y' + (k+1)y = e^{-3t}, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

**Ejercicio 4**
*Dado el sistema lineal*

$$\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$$

*a) Encontrar la solución general y esbozar el diagrama de fases correspondiente. ¿Existen soluciones que satisfacen que $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (0,0)$? En caso afirmativo, indicar cuales son.*

*b) Hallar la curva solución del sistema que satisface la condición inicial $(x(0), y(0)) = (0, -3)$.*

---

**Justifique todas las respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.**

**Respuestas a los ejercicios**

## Ejercicio 1

Veamos que la ecuación

$$y\cos(xy)\,dx + (x\cos(xy) - \sin(xy)\tan(y))\,dy = 0 \tag{1}$$

no es exacta. Sean $M(x,y) = y\cos(xy)$ y $N(x,y) = x\cos(xy) - \sin(xy)\tan(y)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) &= \cos(xy) - xy\sin(xy)\\ \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) &= \cos(xy) - xy\sin(xy) - y\cos(xy)\tan(y).\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = -y\cos(xy)\tan(y) \neq 0$, la ecuación no es exacta. Supongamos que existe un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = h(y)$ tal que la ecuación

$$h(y)y\cos(xy)\,dx + h(y)(x\cos(xy) - \sin(xy)\tan(y))\,dy = 0 \tag{2}$$

sea exacta. Si llamamos $\widetilde{M}(x,y) = h(y)M(x,y)$ y $\widetilde{N}(x,y) = h(y)N(x,y)$, debe cumplirse que

$$\frac{\partial \widetilde{M}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \widetilde{N}}{\partial x}(x,y).$$

esto es,

$$h'(y)M(x,y) + h(y)M_y(x,y) = h(y)N_x(x,y)$$

$$M(x,y)h'(y) + (M_y(x,y) - N_x(x,y))h(y) = 0$$

$$y\cos(xy)h'(y) + y\cos(xy)\tan(y)h(y) = 0$$

$$h'(y) + h(y)\tan(y) = 0$$

esta última es una ecuación separable que se puede reescribir como

$$\frac{h'(y)}{h(y)} = -\tan(y)$$

de donde se obtiene que $\ln|h(y)| = \ln|cos(y)| + C$, es decir, $h(y) = K\cos(y)$. Elegimos la constante $K = 1$ y nos quedamos con el factor integrante $h(y) = \cos(y)$.

Al multiplicar la ecuación (1) por este factor nos queda

$$y\cos(xy)\cos(y)\,dx + (x\cos(xy)\cos(y) - \sin(xy)\sin(y))\;dy = 0$$

la cual es exacta, por lo que existe $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy)\cos(y) \tag{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy)\cos(y) - \sin(xy)\sin(y) \tag{4}$$

Integrando la ecuación (3) con respecto a $x$ se obtiene que

$$f(x, y) = \sin(xy)\cos(y) + g(y)$$

pero

$$x\cos(xy)\cos(y) - \sin(xy)\sin(y) = \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy)\cos(y) - \sin(xy)\sin(y) + g'(y)$$

de donde $g(y) = k$ constante. Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial (1) es

$$f(x, y) = \sin(xy)\cos(y) = C.$$

**Observación:** La ecuación (1) también se puede resolver considerando un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = \lambda(xy)$.

**Ejercicio 2**

Sabemos que la ecuación de la recta tangente a la curva dada por $y = f(x)$ en el punto $(x_0, y_0)$ es

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Luego, si hacemos $x = 0$ obtenemos la ordenada del punto $P = (0, y_1)$, la cual está dada por $y_1 = y_0 - x_0 y'(x_0)$. Al igualar las distancias de $P$ a $(x_0, y_0)$ y de $P$ al origen queda lo siguiente

$$\begin{aligned} d((0, y_1), (x_0, y_0)) &= d((0, y_1), (0, 0)) \\ \sqrt{x_0^2 + (y_1 - y_0)^2} &= |y_1| \\ \sqrt{x_0^2 + (x_0\, y'(x_0))^2} &= |y_0 - x_0\, y'(x_0)| \end{aligned}$$

lo cual se convierte en

$$\begin{aligned} x_0^2 + x_0^2(y'(x_0))^2 &= y_0^2 - 2y_0x_0y'(x_0) + x_0^2(y'(x_0))^2 \\ x_0^2 &= y_0^2 - 2y_0x_0y'(x_0) \\ y'(x_0) &= \frac{y_0^2 - x_0^2}{2y_0x_0} \end{aligned}$$

Como queremos que esto valga en todo punto de la curva, tenemos la siguiente ecuación diferencial

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

Aquí observamos que la función $f(x, y) = \frac{y^2-x^2}{2xy}$ es homogénea de grado cero, con lo cual podemos reescribir la ecuación en la forma

$$y' = \frac{(y/x)^2 - 1}{2(y/x)}$$

y hacer la sustitución $u = y/x$ y $u'x + u = y'$ resultando

$$u'x + u = \frac{u^2 - 1}{2u}$$

$$u'x = \frac{u^2 - 1}{2u} - u = \frac{-1 - u^2}{2u}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{2u}{1+u^2} &= -\frac{1}{x}\,dx \\
\ln(1+u^2) &= -\ln|x| + C \\
1+u^2 &= Kx^{-1}
\end{aligned}
$$

si devolvemos el cambio obtenemos

$$
\begin{aligned}
1+\frac{y^2}{x^2} &= Kx^{-1} \\
x^2+y^2 &= Kx.
\end{aligned}
$$

Así que las curvas que satisfacen la condición geométrica del enunciado son de la forma

$$y(x) = \pm\sqrt{Kx - x^2}.$$

**Ejercicio 3**

*a*) El polinomio característico asociado a la ecuación diferencial es

$$\lambda^2 + (k+2)\lambda + (k+1) = 0.$$

y sus raíces están dadas por

$$\lambda = \frac{-(k+2) \pm \sqrt{(k+2)^2 - 4(k+1)}}{2} = \frac{-k-2 \pm \sqrt{k^2+4k+4-4k-4}}{2} = \frac{-k-2 \pm k}{2}$$

de donde obtenemos $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -k-1$. Para que la solución tienda a 0 cuando $t \to \infty$ debe ocurrir que ambos aulovalores sean negativos, es decir, $-k-1 < 0$ y por lo tanto $k > -1$.

*b*) Para $k = 1$, resolvemos primero la ecuación homogénea asociada

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Las raíces del polinomio característico en este caso son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$, por lo tanto la base de soluciones de la ecuación es $\{e^{-t}, e^{-2t}\}$.

Luego, la solución general de la ecuación homogénea es $y_H(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$.

Busquemos ahora una solución particular de la ecuación no homogénea usando el método de coeficientes indeterminados. Supongamos que la solución es de la forma $y_p(t) = Ae^{-3t}$. Entonces $y_p'(t) = -3Ae^{-3t}$, $y_p''(t) = 9Ae^{-3t}$. Reemplazando en la ecuación no homogénea obtenemos

$$9Ae^{-3t} - 9Ae^{-3t} + 2Ae^{-3t} = e^{-3t}$$

de donde $A = 1/2$. Es decir, que $y_p(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}$ y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}.$$

Usando las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = -2$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones para $C_1$ y $C_2$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 1 \\ -C_1 - 2C_2 - \frac{3}{2} = -2 \end{cases}$$

o sea,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{2} \\ -C_1 - 2C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

de donde se sigue que $C_1 = \frac{1}{2}$ y $C_2 = 0$.

Finalmente, la solución que satisface las condiciones iniciales es

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}.$$

## Ejercicio 4

a) Planteamos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y sea $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes. Busquemos los autovalores de $A$, es decir, las raíces del polinomio característico:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -4 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6,$$

de aquí obtenemos que $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -2$ son los autovalores de $A$. Ahora buscamos los autovectores correspondientes.

Para $\lambda_1 = 3$ tenemos

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en consecuencia, $v_1 = -v_2$, el autoespacio asociado es $S_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ con lo cual un autovector es $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = -2$ tenemos

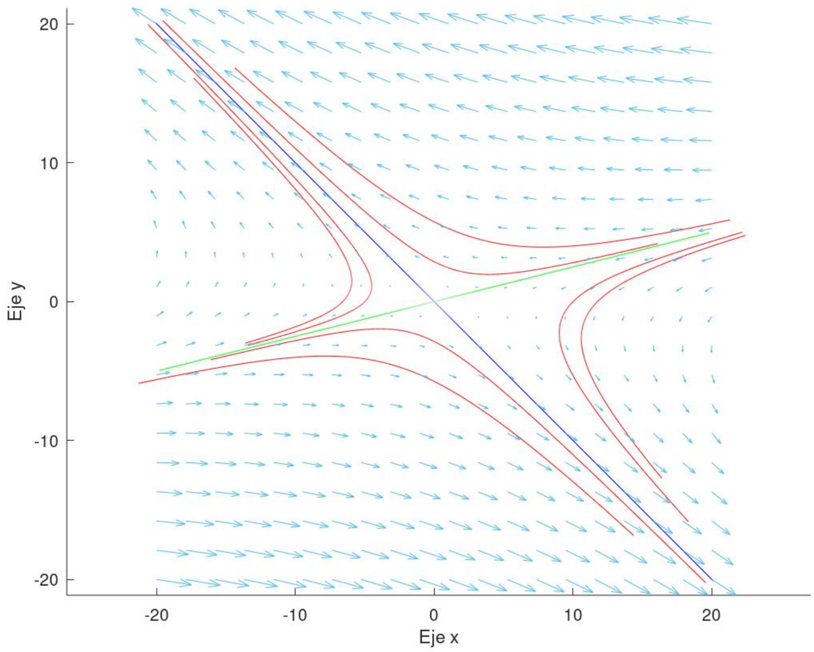
$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en consecuencia, $v_1 = 4v_2$, el autoespacio asociado es $S_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ con lo cual un autovector es $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Con base en lo calculado, la solución general del sistema lineal es:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

Un esbozo del diagrama de fases correspondiente a las soluciones es:




Sí existen soluciones que satisfacen la condición $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (0,0)$, y son todas las de la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

b) Queremos que $(x(0), y(0)) = (0, -3)$, lo cual nos lleva a plantear el sistema

$$\begin{cases} -C_1 + 4C_2 & = 0 \\ \phantom{-}C_1 + C_2 & = -3 \end{cases}$$

cuya solución es $C_1 = -12/5$ y $C_2 = -3/5$.

Por lo tanto, la solución que satisface la condición inicial dada es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = -\frac{12}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} - \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$