1	2	3	4	Calificación

APELLIDO Y NOMBRE: NRO. DE LIBRETA:
CARRERA:

ANÁLISIS II / ANÁLISIS MATEMÁTICO II / MATEMÁTICA 3
VERANO 2020 - PRIMER PARCIAL (19/02/2020)

Ejercicio 1

Sea $\mathcal{C}$ la curva suave que se obtiene de la intersección de las superficies $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ y $x + z = 2$, recorrida desde el punto $(\frac{5}{4}, 0, \frac{3}{4})$ al punto $(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$.

a) *Encontrar una parametrización **regular** de $\mathcal{C}$, y calcular Long$(\mathcal{C})$.*

b) *Hallar la masa total de un alambre que sigue la trayectoria de $\mathcal{C}$, si su densidad de masa está dada por la función $\rho(x, y, z) = xy$.*

Ejercicio 2

Sea $\mathcal{C}$ la curva dada en polares por $r(\theta) = 1 - \cos(\theta)$ con $\theta \in [0, \frac{3\pi}{2}]$. Calcular la circulación del campo

$$F(x, y) = \left(x^4 + y + 2xy\cos(x^2y)\,,\, x^2\cos(x^2y) + \frac{y^5}{7}\right)$$

a lo largo de $\mathcal{C}$ recorrida desde el punto $(0, -1)$ hasta el punto $(0, 0)$.

Ejercicio 3

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por

$$F(x, y, z) = \left(\frac{yz}{1 + x^2} + x + z^2, z\arctan(x) + xy, y\arctan(x) - y + 1\right).$$

a) *Hallar $\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\mathbf{s}$ donde $\mathcal{C}$ es la curva parametrizada por $\sigma(t) = (\sqrt{t^3}, 1, 2\sqrt{t^3})$ con $t \in [0, 1]$.*

b) *Calcular el flujo de $\nabla \times F$ a través de la superficie dada por el triángulo de vértices $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 2)$ y $(1, 0, 0)$ de forma que la normal tenga componente $y \geq 0$.*

Ejercicio 4

Sea S la superficie del elipsoide de ecuación $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$ con $z \geq 1$ orientada de forma que la normal en el punto $(0, 0, 3)$ sea $(0, 0, -1)$. Sea F el campo vectorial dado por

$$F(x, y, z) = \big(xy + \cos(e^z), 9\ln(1 + z^2), z - yz\big)\,.$$

Calcular $\iint_S F \cdot d\mathbf{S}$.

Justifique todas las respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.

Respuestas a los ejercicios

Ejercicio 1

a) La curva $\mathcal{C}$ está dada por el conjunto

$$\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z^2 = 1 \text{ y } x + z = 2\}$$

desde el punto $(\frac{5}{4}, 0, \frac{3}{4})$ al punto $(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$. Para encontrar una parametrización regular de $\mathcal{C}$ reemplazamos $z = 2 - x$ en $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ obteniendo

$$x^2 - y^2 - (2-x)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 - 4 + 4x - x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y^2}{4} + \frac{5}{4}$$

y entonces

$$z = 2 - \left(\frac{y^2}{4} + \frac{5}{4}\right) = \frac{3}{4} - \frac{y^2}{4}.$$

Sea $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\sigma(t) = \left(\frac{t^2}{4} + \frac{5}{4}, t, \frac{3}{4} - \frac{t^2}{4}\right)$. Observemos que $\sigma(0) = (\frac{5}{4}, 0, \frac{3}{4})$ y $\sigma(1) = (\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$, σ es continua y $\sigma([0,1]) = \mathcal{C}$ pues dado un punto $(x,y,z) \in \mathcal{C}$ existe $t \in [0,1]$ tal que $(x,y,z) = \left(\frac{t^2}{4} + \frac{5}{4}, t, \frac{3}{4} - \frac{t^2}{4}\right)$ (ver despeje de antes) y por otra parte los puntos de la forma $\left(\frac{t^2}{4} + \frac{5}{4}, t, \frac{3}{4} - \frac{t^2}{4}\right)$ satisfacen las ecuaciones que definen la curva $\mathcal{C}$, en efecto,

$$x + z = \frac{t^2}{4} + \frac{5}{4} + \frac{3}{4} - \frac{t^2}{4} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2$$

y

$$x^2 - y^2 - z^2 = \left(\frac{t^2}{4} + \frac{5}{4}\right)^2 + t^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{t^2}{4}\right)^2 = \frac{t^4}{16} + \frac{5t^2}{8} + \frac{25}{16} - t^2 - \frac{9}{16} + \frac{3t^2}{8} - \frac{t^4}{16} = 1.$$

Veamos que σ es regular:

- σ es inyectiva ya que $f(t) = t$ es inyectiva en $[0,1]$.
- $\sigma'(t) = \left(\frac{t}{2}, 1, -\frac{t}{2}\right)$, con lo cual σ es $\mathcal{C}^1$ y $\sigma'(t) \neq (0,0,0)$ para todo $t \in [0,1]$.

Hallemos la longitud de $\mathcal{C}$:

$$Long(\mathcal{C}) = \int_0^1 \|\sigma'(t)\|\, dt = \int_0^1 \sqrt{\frac{t^2}{2} + 1}\, dt$$

haciendo la sustitución $t = \sqrt{2}\sinh(x)$, $dt = \sqrt{2}\cosh(x)dx$ queda

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{t^2}{2} + 1}\, dt &= \sqrt{2} \int \left(\sqrt{\sinh^2(x) + 1}\right) \cosh(x)\, dx = \sqrt{2} \int \cosh^2(x)\, dx \\
&= \sqrt{2} \int \frac{1 + \cosh(2x)}{2}\, dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x + \frac{\sinh(2x)}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} (x + \sinh(x)\cosh(x)) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sinh^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{t}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{t^2}{2} + 1}\right)
\end{aligned}$$

Reemplazando y evaluando los límites de integración queda,

$$Long(\mathcal{C}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

b) La masa total del alambre que sigue la trayectoria de la curva dada en el item a) es:

$$Masa\,total = \int_{\mathcal{C}} \rho(x,y,z)\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \left(\frac{t^2}{4} + \frac{5}{4}\right) t\sqrt{\frac{t^2}{2}+1}\,dt.$$

Si hacemos la sustitución $u = \frac{t^2}{2} + 1$, $du = t\,dt$ queda

$$\begin{aligned} Masa\,total &= \int_{\mathcal{C}} \rho(x,y,z)\cdot d\mathbf{s} = \int_1^{3/2} \left(\frac{(u-1)}{2} + \frac{5}{4}\right)\sqrt{u}\,du = \int_1^{3/2}\left(\frac{u^{3/2}}{2} + 3\frac{u^{1/2}}{4}\right) du \\ &= \left(\frac{u^{5/2}}{5} + \frac{u^{3/2}}{2}\right)\Bigg|_1^{3/2} = \frac{(3/2)^{5/2}}{5} + \frac{(3/2)^{3/2}}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = (3/2)^{3/2}\left(\frac{3}{10} + \frac{1}{2}\right) - \frac{7}{10} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{8}{10} - \frac{7}{10} = \frac{6\sqrt{6}}{10} - \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2

Una parametrización regular de la curva dada en polares $r(\theta) = 1 - \cos\theta$ con $\theta \in [0, 3\pi/2]$ es $\sigma(t) : [0, 3\pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(\theta) = ((1-\cos\theta)\cos\theta, (1-\cos\theta)\sin\theta)$. La imagen de esta parametrizacion es el arco de cardioide recorrido desde $(0,0)$ hasta el $(0,-1)$. Sea $\widetilde{\mathcal{C}}$ el segmento de recta que va desde el punto $(0,-1)$ a $(0,0)$ parametrizado por $\widetilde{\sigma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\widetilde{\sigma} = (0, t-1)$; y sea D la región encerrada por la unión de estas curvas. Con las parametrizaciones elegidas, la frontera de D está orientada en sentido antihorario.

Observamos que el campo

$$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(x^4 + y + 2xy\cos(x^2y), x^2\cos(x^2y) + \frac{y^5}{7}\right)$$

es $\mathcal{C}^1$ en D, y podemos aplicar el teorema de Green, es decir

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy + \int_{\widetilde{\mathcal{C}}} P\,dx + Q\,dy$$

de donde

$$\int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA - \int_{\widetilde{\mathcal{C}}} P\,dx + Q\,dy$$

y como queremos calcular la circulación de F sobre $\mathcal{C}$ en el sentido contrario quedaría

$$\int_{\mathcal{C}^-} P\,dx + Q\,dy = \int_{\widetilde{\mathcal{C}}} P\,dx + Q\,dy - \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \tag{1}$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= 2x\cos(x^2y) - 2x^3y\sin(x^2y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= 1 + 2x\cos(x^2y) - 2x^3y\sin(x^2y) \end{aligned}$$

la igualdad (1) se convierte en

$$\int_{\mathcal{C}^-} P\,dx + Q\,dy = \int_{\widetilde{\mathcal{C}}} P\,dx + Q\,dy + \iint_D (-1)\,dA = \int_0^1 \frac{(t-1)^5}{7}\,dt + A(D) = -\frac{1}{42} + A(D).$$

Una manera de calcular el área de D es la siguiente:

$$\begin{aligned}
A(D) = \frac{1}{2}\int_0^{3\pi/2} (r(\theta))^2\,d\theta &= \int_0^{3\pi/2} (1-\cos\theta)^2\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{3\pi/2} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{3\pi/2} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\theta - 2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right)\Bigg|_0^{3\pi/2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\theta - 2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right)\Bigg|_0^{3\pi/2} \\
&= \frac{3\pi}{4} + 1 + \frac{3\pi}{8} \\
&= \frac{9\pi}{8} + 1
\end{aligned}$$

Finalmente, el resultado de la integral que se pide es

$$\int_{\mathcal{C}^-} F\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}^-} P\,dx + Q\,dy = -\frac{1}{42} + \frac{9\pi}{8} + 1 = \frac{9\pi}{8} + \frac{41}{42}.$$

Ejercicio 3

Observamos primero que el campo F se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
F(x,y,z) &= \left(\frac{yz}{1+x^2} + x + z^2, z\arctan(x) + xy, y\arctan(x) - y + 1\right) \\
&= \left(\frac{yz}{1+x^2} + x, z\arctan(x), y\arctan(x) + 1\right) + (z^2, xy, -y) \\
&= G(x,y,z) + H(x,y,z)
\end{aligned}$$

donde

$$\nabla\times G = \left(\arctan(x) - arctan(x), \frac{y}{1+x^2} - \frac{y}{1+x^2}, \frac{z}{1+x^2} - \frac{z}{1+x^2}\right) = (0,0,0)$$

lo cual implica que existe $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tal que $G = \nabla g$, es decir,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \frac{yz}{1+x^2} + x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = z\arctan(x), \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = y\arctan(x) + 1.$$

Integrando la primera ecuación con respecto a x queda

$$g(x,y,z) = yz\arctan(x) + \frac{x^2}{2} + k(y,z)$$

Al derivar con respecto a y queda

$$\frac{\partial g}{\partial y} = z\arctan(x) + \frac{\partial k}{\partial y} = z\arctan(x)$$

de donde $\frac{\partial k}{\partial y}(y,z) = 0$ lo que implica que $k(y,z) = c(z)$ y

$$g(x,y,z) = yz\arctan(x) + \frac{x^2}{2} + c(z).$$

Por último, al derivar g con respecto a z se obtiene

$$\frac{\partial g}{\partial z} = y\arctan(x) + c'(z) = y\arctan(x) + 1$$

y en consecuencia $c'(z) = 1$ es decir, $c(z) = z$. Así, obtenemos que

$$g(x,y,z) = yz\arctan(x) + \frac{x^2}{2} + z.$$

En resumen, escribimos F en la forma $F = \nabla g + H$.

a) La curva $\mathcal{C}$ es el segmento de recta que va del punto $(0,1,0)$ al punto $(1,1,2)$. Observamos que la parametrización dada en el enunciado no es regular, pues $\sigma'(0) = (0,0,0)$. Sin embargo, una parametrización regular de este segmento es $\sigma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma_1(t) = (t,1,2t)$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\mathcal{C}} \nabla g + \int_{\mathcal{C}} H = g(1,1,2) - g(0,1,0) + \int_0^1 \big\langle (4t^2, t, -1), (1,0,2) \big\rangle \, dt \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2} + \int_0^1 (4t^2 - 2)\, dt = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2} + \left(\frac{4}{3}t^3 - 2t \right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

b) Vamos a usar el Teorema de Stokes para calcular el flujo de F a través de la superficie dada por el triángulo de vértices $(0,1,0)$, $(1,1,2)$ y $(1,0,0)$. Procedemos a parametrizar la frontera del triángulo con la orientación inducida por la normal con componente $y \geq 0$. El teorema de Stokes dice que

$$\begin{aligned}
\iint_S \nabla \times F \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} F \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\partial S} \nabla g \cdot d\mathbf{s} + \int_{\partial S} H \cdot d\mathbf{s} \\
&= \int_{\mathcal{C}_1} H \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathcal{C}_2} H \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathcal{C}_3} H \cdot d\mathbf{s}.
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{C}_1$ es la curva del item a), $\mathcal{C}_2$ es el segmento de recta que va de $(1,1,2)$ a $(1,0,0)$ el cual puede ser parametrizado por $\sigma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma_2(t) = (1, 1-t, 2(1-t))$; y $\mathcal{C}_3$ es el segmento que va desde el punto $(1,0,0)$ hasta el punto $(0,1,0)$, cuya parametrización es $\sigma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma_3(t) = (1-t, t, 0)$.

Del item a) tenemos que

$$\int_{\mathcal{C}_1} H \cdot d\mathbf{s} = -\frac{2}{3}.$$

y usando las parametrizaciones de $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ respectivamente obtenemos

$$\int_{\mathcal{C}_2} H \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \left\langle (4(1-t)^2, 1-t, t-1), (0,-1,-2) \right\rangle dt = \int_0^1 (1-t)\, dt = \left(t - \frac{t^2}{2} \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\int_{\mathcal{C}_3} H \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \langle (0, t(1-t), -t), (-1,1,0) \rangle \, dt = \int_0^1 (t-t^2)\, dt + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Por lo tanto,

$$\iint_S \nabla \times F \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{C}_1} H \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathcal{C}_2} H \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathcal{C}_3} H \cdot d\mathbf{s} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0.$$

Ejercicio 4

Vamos a aplicar el Teorema de Gauss para calcular $\iint_S F \cdot d\mathbf{S}$. Consideramos el sólido Ω encerrado por la superficie S_1 del elipsoide de ecuación $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$ con $z \geq 1$ y el círculo S_2 de ecuación $x^2 + y^2 = \frac{8}{9}$ con $z = 1$. Como el campo F es $\mathcal{C}^1$ en Ω, por el teorema de Gauss tenemos que

$$\iiint_\Omega divF \, dV = \iint_{\partial\Omega} F \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} F \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} F \cdot d\mathbf{S}$$

donde $\partial\Omega$ está orientada con la normal exterior. Despejando la integral sobre S_1 nos queda

$$\iint_{S_1} F \cdot d\mathbf{S} = \iiint_\Omega divF \, dV - \iint_{S_2} F \cdot d\mathbf{S}.$$

Para calcular el flujo de F a través de S_2 consideramos la parametrización $\Phi_2(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1)$ con $r \in [0, \sqrt{8}/3]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$ y $(\Phi_1)_r \times (\Phi_1)_\theta = (0,0,r)$; como esta parametrización induce una normal que apunta hacia dentro del sólido Ω, tenemos que

$$\iint_{S_2} F \cdot d\mathbf{S} = -\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{8}/3} (1 - r\sin\theta) r \, dr\, d\theta = -2\pi \left(\frac{r^2}{2} \right)\Big|_0^{\sqrt{8}/3} = -\frac{8\pi}{9}.$$

Calculemos ahora la integral de volumen de $divF = y + 1 - y = 1$, usando un cambio de variables a coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega divF \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{8}/3} \int_1^{3\sqrt{1-r^2}} r \, dz\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{8}/3} (3\sqrt{1-r^2} - 1) r \, dr \\
&= 6\pi \int_0^{\sqrt{8}/3} r\sqrt{1-r^2}\, dr - 2\pi \int_0^{\sqrt{8}/3} r \, dr \\
&= -2\pi (1-r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{8}/3} - \pi (r^2)\Big|_0^{\sqrt{8}/3} \\
&= -2\pi \left(\frac{1}{27} - 1 \right) - \frac{8\pi}{9} \\
&= \frac{28}{27}\pi.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\iint_{S_1} F \cdot d\mathbf{S} = \frac{28\pi}{27} + \frac{8\pi}{9} = \frac{52\pi}{27}$$

y como en el enunciado se pide el flujo de F a través de la superficie del elipsoide con la normal interior, la integral requerida es

$$\iint_S F \cdot d\mathbf{S} = -\frac{52\pi}{27}.$$