

## Práctica 5

1. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Para cada partición  $\pi$  de  $[a, b]$  (si  $\pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ) se define

$$\pi(f) := \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$

Demostrar que si  $\pi_1 \subset \pi_2$  son dos particiones de  $[a, b]$ , entonces  $\pi_1(f) \leq \pi_2(f)$ .

2. Estudiar si las funciones que siguen son de variación acotada en el intervalo  $[a, b]$  correspondiente y en el caso afirmativo dar una mayoración para  $V_f(a, b)$ .

$$(a) \ f(x) = \cos(x) \text{ en } [0, 3\pi] \quad (b) \ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$(c) \ f(x) = 2x^3 - 3x^2 \text{ en } [-1, 2] \quad (d) \ f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)^2 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En el caso (d) estudiar también la derivabilidad de  $f$ .

3. Demostrar que si  $f$  y  $g$  son funciones de variación acotada en  $[a, b]$  entonces  $fg$  también lo es.
4. Para las funciones de variación acotada que siguen, hallar la función  $V_f$  (recordamos que  $V_f(a) = 0$  y  $V_f(x) = V_f(a, x)$  si  $a < x \leq b$ ):

$$(a) \ f(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 - x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad (b) \ f(x) = \sin x \text{ en } [0, 2\pi]$$

Para cada función encontrar explícitamente funciones monótonas crecientes  $g_1$  y  $g_2$  tales que  $f = g_1 - g_2$ .

5. Demostrar que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de variación acotada entonces es integrable Riemann.
6. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  en  $[a, b]$ . Demostrar que  $f$  es de variación acotada y que vale la igualdad  $V_f(a, b) = \int_a^b |f'(x)| dx$ .

7. Analizar en cada caso la existencia de  $\int_a^b f d\alpha$  y calcularla cuando corresponda.

(a)  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función arbitraria y  $f$  una función constante sobre  $[a, b]$ .

- (b)  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con  $\alpha(a) = a_0$ ,  $\alpha(b) = b_0$ ;  $c \in (a, b)$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) := \begin{cases} 5 & \text{si } x \in [a, c) \\ 3 & \text{si } x = c \\ -1 & \text{si } x \in (c, b] \end{cases}$ .

¿Qué sucede si en lugar de tomar  $\alpha$  continua sólo se sabe que  $\alpha$  es continua en un entorno de  $c$ ?

- (c)  $f$  como en el ítem anterior y  $\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, c] \\ -1 & \text{si } x \in (c, b] \end{cases}$ .
- (d)  $f(x) = x^3$ ,  $\alpha(x) = x^2$  y  $[a, b] = [-1, 3]$ .
- (e)  $f(x) = \alpha(x) = \cos(x)$  y  $[a, b] = [0, \frac{\pi}{4}]$ .

8. Sean  $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , tales que  $f$  es continua e integrable respecto de  $\alpha$  en  $[a, b]$  y sea  $c \in (a, b)$ . Si  $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  satisface  $\beta(x) = \alpha(x)$  para todo  $x \neq c$ , probar que  $f \in \mathfrak{R}(\beta)$  en  $[a, b]$  y  $\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\beta$ .

¿Qué sucede si  $c = a$  o  $c = b$ ?

9. Dadas las funciones siguientes definidas en el intervalo  $[0, 2]$ :  $f(x) = |x - 1|$ ,  $\alpha(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x = 0 \\ e^x & \text{si } x \in (0, 2] \end{cases}$ , demostrar que  $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$  en  $[0, 2]$  y calcular  $\int_0^2 f d\alpha$ .
10. Sean  $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $c \in (a, b)$  tales que  $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$  en  $[a, c]$  y  $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$  en  $[c, b]$ . Demostrar que  $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$  en  $[a, b]$  y  $\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha$ .

11. Supongamos que  $\int_a^b f d\alpha$  existe y es igual a 0 para toda función monótona creciente  $f$ . ¿Qué puede decir sobre la función  $\alpha$ ?

*Sugerencia.* Para cada  $c \in [a, b]$  considere la función monótona  $f_c$  definida como  $f_c(x) = 0$  si  $a \leq x \leq c$  y  $f_c(x) = 1$  sino.

12. Sean  $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Para cada partición  $\pi = \{x_0, \dots, x_n\}$  del intervalo  $[a, b]$ , se define  $s_\pi := \sum_{k=1}^n f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$ , donde  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ .

Demostrar que si  $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$  entonces existe una sucesión de particiones  $(\pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$  que cumple las condiciones:

- (a)  $(\pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$  es monótona en el sentido siguiente: si  $m < m'$  entonces  $\pi_m \subset \pi_{m'}$ .
- (b)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\pi_m\| = 0$ .
- (c)  $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{\pi_m} = \int_a^b f d\alpha$ , independientemente de la elección de los  $t_k$  en cada suma  $s_{\pi_m}$ .
- (d) Toda otra sucesión  $(\sigma_m)_{m \in \mathbb{N}}$  monótona de particiones tal que  $\pi_m \subset \sigma_m$  para todo  $m \in \mathbb{N}$  suficientemente grande cumple las condiciones (b) y (c) precedentes.

Si ahora  $g, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son otras funciones, tales que  $g \in \mathfrak{R}(\beta)$  y para cada partición  $\pi$  notamos  $r_\pi := \sum_{k=1}^n g(t_k)[\beta(x_k) - \beta(x_{k-1})]$ , donde  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ , deducir que entonces existe una sucesión de particiones  $(\pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{\pi_m} = \int_a^b f d\alpha$  y  $\lim_{m \rightarrow \infty} r_{\pi_m} = \int_a^b g d\beta$ .

13. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monótona creciente. Demostrar que si  $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$  en  $[a, b]$  y  $[c, d] \subset [a, b]$ , entonces  $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$  en  $[c, d]$ .
14. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monótona creciente.
- (a) Demostrar que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $\int_a^b f d\alpha = f(c)(\alpha(b) - \alpha(a))$ .
- (b) Suponiendo que  $\alpha$  es además derivable en  $(a, b)$ , (pero no necesariamente de clase  $C^1$ ), demostrar que la función

$$\psi(x) = \int_a^x f d\alpha$$

es derivable en  $(a, b)$  y que  $\psi'(x) = f(x)\alpha'(x)$  para todo  $x \in (a, b)$ .

15. Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monótona creciente. Demostrar que si  $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$  y  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces  $\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b g d\alpha$ .

Deducir que si  $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$  entonces  $\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq \int_a^b |f| d\alpha$ .

16. Para cada  $x \in \mathbb{R}$  vamos a notar con  $\lfloor x \rfloor$  a la parte entera de  $x$ , es decir:  $\lfloor x \rfloor := \max \{n \in \mathbb{Z} / n \leq x\}$ .

Analizar la existencia de las integrales que siguen y en caso afirmativo calcularla:

$$(a) \int_0^4 x^2 d(\lfloor x \rfloor) \quad (b) \int_0^2 x d(x - \lfloor x \rfloor) \quad (c) \int_0^2 x^2 d(\lfloor x \rfloor)$$

17. Sea  $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f$  es una función continua y  $\alpha$  es de variación acotada.
- (a) Demostrar que  $|f| \in \mathfrak{R}(V_\alpha)$ .
- (b) Demostrar que vale la desigualdad  $\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq \int_a^b |f| dV_\alpha$ . *Sugerencia.* Tener en cuenta el Ejercicio 12.
- (c) Deducir de (b) que  $\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq V_\alpha(a, b) \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ .
- (d) Para cada  $x \in [a, b]$  se define  $\psi(x) = \int_a^x f d\alpha$  (observar que  $\psi$  está bien definida). Probar que  $\psi$  es de variación acotada.
- (e) Si  $\alpha$  es Lipschitz en  $[a, b]$ , probar que la función  $\psi$  definida en el ítem anterior también es Lipschitz en  $[a, b]$ .