

**MATEMATICA 2 - Verano 2019****Práctica 7 - Forma de Jordan**

En lo que sigue se nota con  $m_A(t)$  el polinomio minimal de una matriz  $A$ .

1. Calcular el polinomio característico y el polinomio minimal de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Determinar la forma y una base de Jordan de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Sea  $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$  tal que  $m_A(t) = t^3$ . Determinar las posibles formas de Jordan de  $A$ .  
 (b) Sea  $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$  nilpotente tal que  $\text{rg}(A) = 6$ . ¿Cuántos bloques tiene la forma de Jordan de  $A$ ? ¿Y si  $A \in \mathbb{C}^{16 \times 16}$  con  $\text{rg}(A) = 9$ ?
4. Hallar la forma y la base de Jordan para cada una de las matrices siguientes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Sea  $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$  tal que  $m_A(t) = t^6$ , y sea  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$  una base de Jordan para  $A$ . Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices  $A^2$ ,  $A^3$ ,  $A^4$  y  $A^5$ .
6. Hallar la forma y una base de Jordan de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 12 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz siguiente para cada valor de  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Determinar la forma de Jordan de  $A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$  con autovalores  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  distintos tal que:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^2 &= 11, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^3 &= 10, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^4 &= 10 \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^2 &= 11, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^3 &= 10, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^4 &= 9, \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I)^2 &= 12, & \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I)^3 &= 11. \end{aligned}$$

9. Decidir si las matrices siguientes son semejantes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. Calcular para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

11. Hallar una fórmula general para el término general  $a_n$  de la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  definida por:

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = \beta, \quad a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{donde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

12. (a) Calcular  $e^{At}$  para las matrices  $A$  siguientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 2$ .

(c) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) + y(t) \\ z'(t) = -x(t) - y(t) + 3z(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales arbitrarias  $x(0) = a$ ,  $y(0) = b$ ,  $z(0) = c$ .