

Estadística (Q) - Verano 2019

Marina Valdora (mvaldora@gmail.com)

Mariela Sued (marielasued@gmail.com)

Clase 3: Variables Aleatorias

Definición: Independencia

- A y B se dicen independientes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

- Lema: Si A y B son independientes y $\mathbb{P}(B) > 0$, entonces

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$$

Para pensar

Un experimento con dos posibles resultados (éxito-fracaso) se llama **ensayo o experimento (Bernoulli)**.

Muchos experimentos, constan de varios subexperimentos Bernoulli, repetidos de manera independiente en idénticas condiciones.

Ejemplo: para pensar

Ejemplo: Considere $n = 4$ repeticiones independientes de un ensayo con dos posibles resultados: éxito (1), con probabilidad $p = 0.8$ y fracaso (0) con probabilidad $1 - p = 0.2$.



Ejemplo: para pensar

Ejemplo: Considere $n = 4$ repeticiones independientes de un ensayo con dos posibles resultados: éxito (1), con probabilidad $p = 0.8$ y fracaso (0) con probabilidad $1 - p = 0.2$.

- Calcule la probabilidad de cada elemento del espacio muestral.
¿Es equiprobable?
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos un éxito?
- ¿Cuál es la probabilidad de ocurra exactamente un éxito?
- ¿Cuál es la probabilidad de ocurran exactamente dos éxito?
- ¿Cuál es la probabilidad de ocurran a lo sumo dos éxitos?

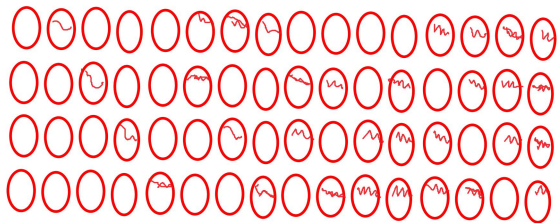
Para pensar: caso general

Considere n repeticiones independientes de un experimento con dos posibles resultados: éxito, con probabilidad p y fracaso con probabilidad $1 - p$.

- ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ningún éxito?
- ¿Cuál es la probabilidad de ocurra exactamente un éxito?
- ¿Cuál es la probabilidad de ocurran todos éxitos?
- Indique la cantidad mínima y máxima de éxitos que pueden ocurrir.
- Considere $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, ¿cuál es la probabilidad de ocurran exactamente k éxitos?

Variables Aleatorias

Variables Aleatorias– Ejemplo: X = número de lamparas rotas.



Variable Aleatoria – Ejemplo

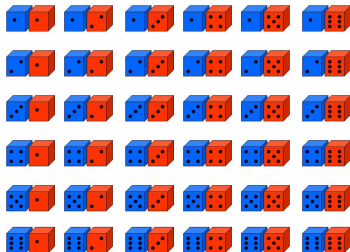
t	0	1	2	3	4

Variable Aleatoria – Ejemplo

t	0	1	2	3	4
p_X	$(1 - p)^4$	$\binom{4}{1}p(1 - p)^3$	$\binom{4}{2}p^2(1 - p)^2$	$\binom{4}{3}p^3(1 - p)$	p^4

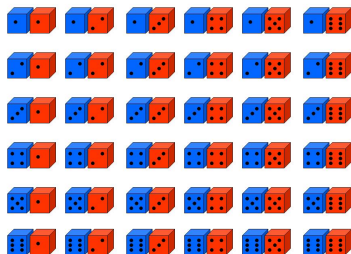
Variables Aleatorias: suma de dados equilibrados

Posibles resultados



Variables Aleatorias: suma de dados equilibrados

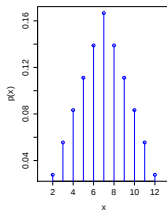
Posibles resultados



t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = t)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Variables Aleatorias: suma de dados equilibrados

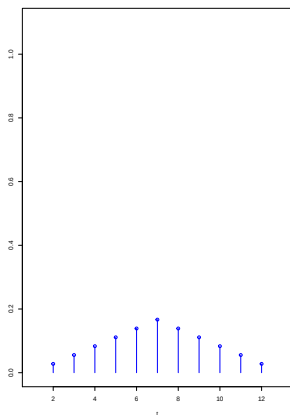
t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = t)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



Variables Aleatorias: suma de dados equilibrados

t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = t)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

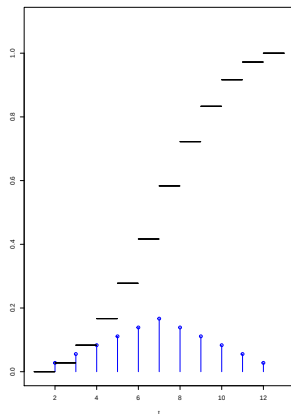
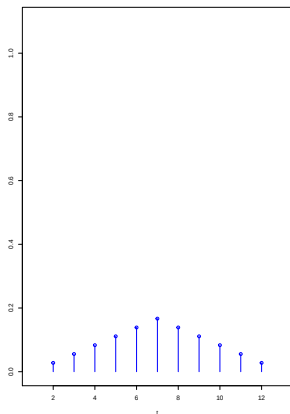
Acumulada $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$



Variables Aleatorias: suma de dados equilibrados

t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = t)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

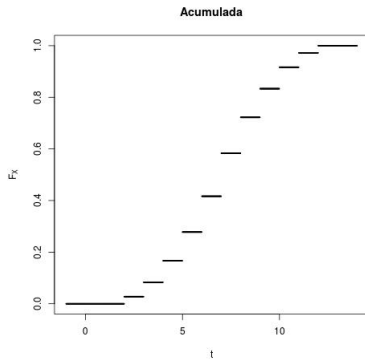
Acumulada $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$



Variables Aleatorias: Puntual y Acumulada

t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = t)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Acumulada: $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$



Variables Aleatorias (observale)

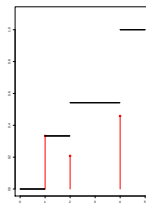
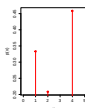
Una variables aleatoria X es función definida sobre el espacio muestral $\mathcal{S}$ que toma valores en los reales:

$$X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

Variables Discretas: Ejemplo

- Función de probabilidad puntual

x	1	2	4
p_X	$8/24$	$5/24$	$11/24$



- Función de distribución acumulada $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 8/24 & 1 \leq t < 2 \\ 8/24 + 5/24 & 2 \leq t < 4 \\ 8/24 + 5/24 + 11/24 & 4 \leq t. \end{cases}$$

Varibles Aleatorias Discretas

- X toma una cantidad *numerable* de valores $\{x_1, x_2, \dots\}$.
- Función de probabilidad puntual $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$.
- Rango^(*ojo) de X : $Rg(X) = \{x_i : p_X(x_i) > 0\}$.
- $\mathbb{P}(X \in B) = \sum_{x_i \in B} p_X(x_i)$
- $F_X(t) = \sum_{x_i \leq t} p_X(x_i)$.
- F_X queda unívocamente determinada por p_X .

Variables Discretas: Ejemplo 1*

- Función de probabilidad puntual

x	-1	1	4	5	7	10
p_X	2/24	6/24	4/24	1/24	7/24	4/24

- Implemente una función **pejemplo_1** que tenga por input t y devuelva $F_X(t)$, cuando X es la variable con puntual dada en la tabla.
- Grafique F_X , para $t \in (-2, 11)$, utilizando una grilla de paso 0.01

*: Para pensar y tratar de hacer en R

Variables Discretas: Ejemplo 2*

- Función de probabilidad puntual

x	-1.3	1.8	4.2	5,5	7.4	10.3
p_Y	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

- Implemente una función **pejemplo_2** que tenga por input t y devuelva $F_Y(t)$, cuando Y es la variable con puntual dada en la tabla.
- Grafique F_Y , para $t \in (-2, 11)$, utilizando una grilla de paso 0.01

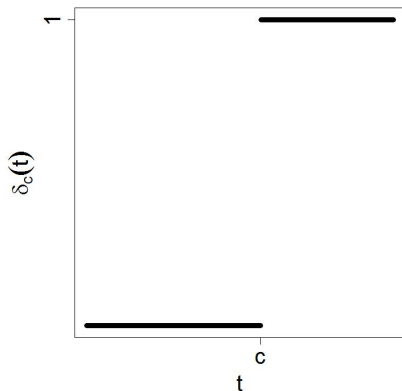
*: Para pensar y tratar de hacer en R

Discretas Famosas

Variables Discretas: $X = c$

- Acumulada de una constante:

$$F_X(t) = \delta_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq c \end{cases}$$



Ensayos / Experimentos Bernoulli

- Dos posibles resultados: éxito ($X = 1$) o fracaso ($X = 0$).
- $Rg(X) = \{0, 1\}$

$$p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

$$p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = p ,$$

Ensayos / Experimentos Bernoulli

- Dos posibles resultados: éxito ($X = 1$) o fracaso ($X = 0$).
- $Rg(X) = \{0, 1\}$

$$p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

$$p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = p ,$$

- Representación alternativa de la puntual:

$$p_X(x) = p^x(1 - p)^{1-x} , \quad \text{para } x \in \{0, 1\}.$$

- Parámetro: $p \in [0, 1]$

Binomial - Ejemplo

El 30% de las piezas producidas por una fábrica presentan defectos. Se examinan $n = 7$ piezas.

- ¿Cuál es la probabilidad de que dos de ellas estén falladas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellas estén falladas?

Binomial

- n repeticiones independientes de experimento Bernoulli con probabilidad de éxito p .
- X : número de éxitos en n repeticiones.
- $Rg(X) = \{0, 1, \dots, n\}$.

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ para } 0 \leq k \leq n.$$

- Notación: $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
- Parámetros: n, p ($p \in [0, 1]$).

La binomial en R

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

- puntual: $\text{dbinom}(x, n, p) = \mathbb{P}(X = x)$.
- acumulada: $\text{pbinom}(x, n, p) = \mathbb{P}(X \leq x)$
- simulación I : $\text{rbinom}(1, n, p)$ genera un posible resultado de X , cuando $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
- simulación II (muchas): $\text{rbinom}(N, n, p)$ genera N posibles resultados de X , cuando $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Puntual de Binomial: $X \sim \mathcal{B}(7, 0.3)$

El 30% de las piezas producidas por una fábrica presentan defectos. Se examinan $n = 7$ piezas. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de ellas estén falladas?

Conteo: Poisson

X = Número de visitas recibidas en el nido en media (0.5)-hora.

Conteo: Poisson

X = Número de visitas recibidas en el nido en media (0.5)-hora.

Distribución Poisson de parámetro $\lambda > 0$:

- $Rg(X) = \{0, 1, \dots\}$
- Puntual: $p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$.
- Notación: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Aproximaciones

$$\mathcal{B}(N, \lambda/N) \quad \text{aprox} \quad \mathcal{P}(\lambda)$$

$$\mathcal{B}(N, p) \quad \text{aprox} \quad \mathcal{P}(Np)$$

Poisson en R

- puntual: $\text{dpois}(x, \text{lambda}) = \mathbb{P}(X = x)$, cuando $X \sim \mathcal{P}(\text{lambda})$.
- acumulada: $\text{ppois}(x, \text{lambda}) = \mathbb{P}(X \leq x)$
- simulación I : $\text{rpois}(1, \text{lambda})$ genera un posible resultado de X , cuando $X \sim \mathcal{P}(\text{lambda})$.
- simulación II (muchas): $\text{rpois}(N, \text{lambda})$ genera N posibles resultados de X , cuando $X \sim \mathcal{P}(\text{lambda})$.