

# Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3.

## Curso de verano 2019

### Práctica 2 - Integrales de superficie.

**Ejercicio 1.** Dadas las siguientes superficies en coordenadas esféricas, determinar su correspondiente ecuación en coordenadas cartesianas y graficar

- $r = k$  ( $k = cte$ ).
- $\varphi = k$ ,  $k \in (0, \pi/2]$  constante.

En cada uno de los casos anteriores dé un vector normal en cada punto.

**Ejercicio 2.** a). Mostrar que  $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$  y  $\Phi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3$  dadas por

$$\begin{aligned}\Phi_1(u, v) &= \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right), \text{ con } a, b \text{ no nulos,} \\ \Phi_2(u, v) &= (au \cos(v), bu \sin(v), u^2),\end{aligned}$$

son dos parametrizaciones del **paraboloide elíptico**.

b). Mostrar que

$$\Phi(u, v) = ((a + b \cos(u)) \sin(v), (a + b \cos(u)) \cos(v), b \sin(u))$$

con  $0 < b < a$ , y  $u, v \in [0, 2\pi]$ , es una parametrización del **toro**.

**Ejercicio 3.** Considerar la superficie dada por la parametrización:

$$x = u \cos(v), \quad y = u \sin(v), \quad z = u.$$

¿Es diferenciable esta parametrización? ¿Es suave la superficie?

**Ejercicio 4.** Sea  $\mathcal{C}$  la curva en el plano  $xy$  dada en polares por:

$$r = 2 - \cos \theta \quad \text{para} \quad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

Sea  $S$  la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje  $y$ .

- Dar una parametrización de  $S$ .
- ¿Es suave esta superficie?

**Ejercicio 5.** Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera de radio  $a$  y centro en el origen en un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  genérico de la esfera.

**Ejercicio 6.** Encontrar una ecuación para el plano tangente en el punto  $(0,1,1)$  a la superficie dada por la parametrización

$$x = 2u, \quad y = u^2 + v, \quad z = v^2.$$

**Ejercicio 7.** Sea  $\phi(r, \theta) : [0, 1] \times [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3$  dada por

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad z = \theta,$$

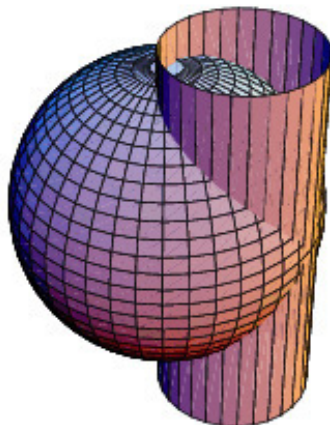
la parametrización de una superficie  $\mathcal{S}$ . Graficar  $\mathcal{S}$ , hallar un vector normal en cada punto y hallar su área.

**Ejercicio 8.** Sea  $\phi(u, v) : D \mapsto \mathbb{R}^3$  ( $D$  el disco unitario centrado en el origen)

$$\phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$$

la parametrización de una superficie. Calcular su área.

**Ejercicio 9.** Calcular el área de la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  con  $(x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2$ . Esta superficie se conoce como *bóveda de Viviani*.



**Ejercicio 10.** Sea la curva  $z = f(x)$   $x \in [\alpha, \beta]$  con  $f$  y  $\alpha$  positivos, girada alrededor del eje  $z$ . Mostrar que el área de la superficie barrida es

$$A = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Aplicar a la superficie dada en el ejercicio (2) ítem a) para calcular el área del paraboloides elíptico con  $1 \leq z \leq 2$ , y  $a = b = 1$ .

**Ejercicio 11.** Sea  $\mathcal{C}$  la curva

$$\begin{cases} x = \cos^3 \theta \\ y = \sin^3 \theta \end{cases}$$

con  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  en el plano  $xy$ . Sea  $S$  la superficie que se obtiene al girar la curva  $\mathcal{C}$  alrededor del eje  $z$

- Hallar una parametrización de  $S$ .
- Hallar el área de  $S$ .

**Ejercicio 12.** Calcular  $\int_S xy dS$  donde  $S$  es el borde del tetraedro con lados  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + z = 1$  y  $x = y$ .

**Ejercicio 13.** Calcular  $\int_S (x + y + z) dS$  donde  $S$  es el borde de la bola unitaria, es decir

$$S = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

**Ejercicio 14.** Hallar la masa de una superficie esférica de radio  $r$  tal que en cada punto  $(x, y, z) \in S$  la densidad de masa es igual a la distancia entre  $(x, y, z)$  y el punto  $(0, 0, r)$ .

**Definición .1.** Decimos que una superficie  $\mathcal{S}$  es orientable si hay una forma de elegir en cada punto  $P$  de  $\mathcal{S}$  un único versor normal  $\nu(P)$  de modo que la función vectorial que esta elección define sobre  $\mathcal{S}$  resulte continua.

Por ejemplo, si  $\mathcal{S}$  es un gráfico,  $\mathcal{S} : z = f(x, y)$ , se puede elegir en todos los puntos un versor normal que apunte hacia arriba (es decir, con componente  $z$  positiva). Esta elección es continua en  $\mathcal{S}$ .

Si  $\mathcal{S}$  es el borde de una región  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  de tipos I, II o III, se puede elegir como  $\nu(P)$  la normal que apunta hacia afuera de  $\Omega$ .

**Proposición .1.** Sea  $\mathcal{S}$  una superficie suave y  $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular de  $\mathcal{S}$ . Para cada  $P \in \mathcal{S}$ , sea

$$\nu(P) = \frac{T_u(u, v) \times T_v(u, v)}{\|T_u(u, v) \times T_v(u, v)\|}, \quad \text{donde } (u, v) \text{ es tal que } P = T(u, v).$$

Entonces, esta elección de versor normal orienta la superficie  $\mathcal{S}$ . En este caso, decimos que  $\mathcal{S}$  está orientada por la parametrización  $T$ .

**Definición .2.** Sea  $\mathcal{S}$  una superficie orientada por el versor normal  $\nu(P)$ . Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial continuo sobre  $\mathcal{S}$ . Llamamos flujo de  $\mathbf{F}$  a través de  $\mathcal{S}$  a la integral

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} := \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS.$$

**Proposición .2.** Sea  $\mathcal{S}$  una superficie suave orientada por la parametrización regular  $T : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Sea  $T_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una reparametrización de  $T$  que preserva la orientación. Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial continuo sobre  $\mathcal{S}$ . Entonces, el cálculo de  $\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  da el mismo resultado cuando se utiliza la parametrización  $T$  o la parametrización  $T_1$ . Si  $T_1$  invierte la orientación, los cálculos difieren sólo en el signo.

**Ejercicio 15.** Probar la Proposición .2.

**Ejercicio 16.** Evaluar el flujo saliente del campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  a través de la superficie del cubo  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .

**Ejercicio 17.** Si la temperatura en un punto de  $\mathbb{R}^3$  está dada por la función  $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$ , calcular el flujo de calor (es decir el flujo del campo  $-\nabla T$ ) a través de la superficie  $x^2 + z^2 = 2$ ,  $0 \leq y \leq 2$ , orientada de forma que la normal en el punto  $(0, 0, \sqrt{2})$  sea  $(0, 0, 1)$ .

**Ejercicio 18.** Sea  $S$  la superficie de la esfera unitaria orientada según la normal exterior. Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial y  $F_r$  su componente radial. Probar que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_r \sin(\phi) \, d\phi \, d\theta$$

**Ejercicio 19.** Sea  $S$  la parte del cono  $z^2 = x^2 + y^2$  con  $z$  entre 1 y 2 orientada con la normal apuntando hacia el exterior del cono. Calcular  $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  con  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ .

**Ejercicio 20.** Sean  $S$  una superficie orientada y  $C$  una curva cerrada simple que es el borde de  $S$  con alguna de sus dos posibles orientaciones. Verificar que si  $\mathbf{F}$  es un campo gradiente ( $\mathbf{F} = \nabla f$ ) entonces

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

**Ejercicio 21.** Sea  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, x^2, yx^2)$  que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan el plano  $xy$  a través del cuadrado  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .