

Práctica 9: Cambio de variables y aplicaciones

1. (Coordenadas polares) Dada $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sean $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ y $g(r, \theta) = f(x, y)$. Calcular $\frac{\partial g}{\partial r}$ y $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f .
2. Sean $D^* = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y T la transformación de coordenadas polares a cartesianas, es decir,
 $T(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.
 - (a) Mostrar que $T(D^*) = D$. ¿Es biyectiva T ?
 - (b) ¿En que transforma T el rectángulo $[r, r + \Delta r] \times [\theta, \theta + \Delta \theta]$?
 - (c) Calcular la matriz $DT(r, \theta)$. ¿En que transforma la aplicación dada por esta matriz al rectángulo dado en b)? ¿Y en el caso $r = 0$?
 - (d) Relacionar con la fórmula de cambio de variables en este caso (haciendo los dibujos correspondientes).
3. Sean $D_1 = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 4\pi\}$ y T la transformación del ejercicio anterior.
 - (a) Hallar $D = T(D_1)$.
 - (b) Calcular $\int_D (x^2 + y^2) dx dy$ y $\int_{D_1} r^2 J dr d\theta$ siendo J el jacobiano de la transformación. ¿Dan igual las dos integrales? ¿Por qué?
4. Calcular el área de un círculo de radio r y el área de una elipse con semiejes de longitud a y b .
5. (a) Sea $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = (4u, 2u + 3v)$. Sea D^* el rectángulo $[0, 1] \times [1, 2]$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular:
 - a) $\int_D xy dx dy$ y
 - b) $\int_D (x - y) dx dy$haciendo un cambio de variables para transformarlas en integrales sobre D^* .
 - (b) Repetir el ítem anterior para $T(u, v) = (u, v(1 + u))$.
6. Sean $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ y $D^* = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular su área.

7. Sean $T(u, v)$ y D los del ejercicio anterior. Calcular:

$$\int_D \frac{dx dy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

haciendo ese cambio de variables.

8. Calcular $\int_D (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy$ donde D es el disco de centro en el origen y radio 2.
9. Hallar el área dentro de la curva $r = 1 + \sin \theta$.
10. Dado el paralelogramo P del plano xy con vértices $(0,0)$, $(2,10)$, $(3,17)$ y $(1,7)$,
- Hallar una transformación lineal que convierta a P en un rectángulo R del plano uv con vértices opuestos en $(0,0)$ y $(4,2)$.
 - Calcular la integral $\int_P xy dx dy$ transformándola en una integral sobre el rectángulo R .
11. Es sabido, aunque difícil de demostrar, que una primitiva de la función e^{-x^2} no puede expresarse en términos de las funciones elementales usuales. Esto dificulta el cálculo de $\int_a^b e^{-x^2} dx$. Sin embargo, el siguiente truco notable permite calcular de manera simple la integral impropia

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$$

- Observar que $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$
 - Calcular la integral de (a) como límite de integrales en círculos utilizando coordenadas polares.
12. Hallar el área acotada por la curva dada por la ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Esta curva se llama lemniscata. ¿Por qué?

13. Calcular $\int_A \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx dy$, donde A está determinado por las condiciones $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x + y \geq 1$.
14. (a) (Coordenadas esféricas) Dada $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, sean $x = r \cos(\theta) \sin(\phi)$, $y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$, $z = r \cos(\phi)$ y sea

$$g(r, \theta, \phi) = f(x, y, z)$$

Calcular $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial g}{\partial \phi}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f .

- (b) (Coordenadas cilíndricas) Dada $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, sean $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ y $g(r, \theta, z) = f(x, y, z)$.

Calcular $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f .

15. Integrar $ze^{x^2+y^2}$ sobre el cilindro dado por $x^2 + y^2 \leq 4$, $2 \leq z \leq 4$.
16. Calcular el volumen de un cilindro con base circular de radio r y altura h .
17. (a) Calcular el volumen $V(R)$ de una esfera B_R de radio R .
 (b) Llamando ∂B_R a la superficie del borde de la esfera B_R y $A(\partial B_R)$ a su área, demostrar que $\frac{dV(R)}{dR} = A(\partial B_R)$ y deducir el valor del área de dicha superficie.
18. Integrar $x^2 + y^2 + z^2$ sobre el cilindro dado por $x^2 + y^2 \leq 2$, $-2 \leq z \leq 3$.
19. Sea B la bola unitaria, es decir, $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Calcular:

$$\int_B \frac{dx dy dz}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}}.$$

20. Calcular:

$$\int_S \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

donde S es el sólido acotado por dos esferas de radios a y b con $0 < b < a$ y centradas en el origen.

21. Calcular $\int_B z dx dy dz$ donde B es la región sobre el plano xy dentro del cilindro dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ y debajo del cono dado por $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$.
22. Sea E el elipsoide dado por $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1$.
 (a) Hallar el volumen de E .
 (b) Calcular $\int_E [(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)] dx dy dz$.
23. Si un sólido W tiene densidad ρ , su masa está dada por

$$\int_W \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Hallar la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$ si la densidad es $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

24. Sea ρ la densidad de un sólido W . Se definen los primeros momentos de W respecto de los planos coordenados M_{yz} , M_{xz} , M_{xy} , como

$$\int_W x \rho(x, y, z) dx dy dz, \int_W y \rho(x, y, z) dx dy dz, \int_W z \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

respectivamente y su centro de masa como

$$\left(\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M}\right),$$

donde M es la masa de W . Hallar el centro de masa del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, $1 \leq z \leq 2$, si la densidad es $\rho = (x^2 + y^2)z^2$.

25. Si un sólido W tiene densidad uniforme ρ , el *momento de inercia* alrededor del eje x está definido por,

$$I_x = \int_W \rho(y^2 + z^2) dx dy dz$$

y análogamente se definen I_y e I_z . Sea ahora W el sólido con densidad constante acotado por arriba por el plano $z = a$ y por debajo por el cono descrito en coordenadas esféricas por $\phi = k$, donde k es una constante tal que $0 < k < \pi/2$. Dar una integral para su momento de inercia alrededor del eje z .

26. Hallar el momento de inercia alrededor del eje y para la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ si la densidad de masa es una constante ρ .
27. Dado un sólido W con densidad de masa $\rho(x, y, z)$, la fuerza gravitacional $\mathbf{F}$ que ejerce W sobre una masa m en (x_1, y_1, z_1) está dada por el gradiente de una función V llamada *potencial gravitacional*, es decir, $\mathbf{F} = -\nabla V$. Este *potencial gravitacional* está dado por,

$$V(x_1, y_1, z_1) = Gm \int_W \frac{\rho(x, y, z) dx dy dz}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}$$

donde G es la constante de gravitación universal.

- (a) Hallar el potencial gravitacional sobre una masa m de un planeta esférico con masa $M = 3 \cdot 10^{26}$ kg y densidad constante, a una distancia de $2 \cdot 10^8$ m de su centro.
- (b) Hallar la fuerza gravitacional ejercida sobre un objeto de 70 kg en la posición indicada en a).