Práctica 8: Integración

Integración en una variable

1. Calcular:

   $(a)\ \int x \operatorname{sen} x\, dx.$ $\quad (c)\ \int x e^{x^2}\, dx.$ $\quad (e)\ \int \frac{3x-2}{x^2+x-2}\, dx.$

   $(b)\ \int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx.$ $\quad (d)\ \int e^x \operatorname{sen} x\, dx.$ $\quad (f)\ \int \ln x\, dx.$

2. Hallar el área encerrada por las curvas:
   (a) $y = x^3$ e $y = x$.
   (b) $y = x^3 - x$ y la recta tangente a esta curva en $x = -1$.
   (c) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ y la recta $y = 12$ entre $x = 0$ y $x = 3$.
   (d) $y = \operatorname{sen} x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2\pi$.

3. (a) Calcular $\int_{-2}^{0} e^x\, dx$.
   (b) Hallar el área encerrada por las curvas: $y = 0$, $y = -2$, $y = \log x$ y $x = 0$.

4. Calcular:

   $(a)\ \int_{-2}^{3} x^2 - 1\, dx.$ $\quad (c)\ \int_{-2}^{3} |x^2 + 1|\, dx.$

   $(b)\ \int_{-2}^{3} |x^2 - 1|\, dx.$ $\quad (d)\ \int_{1}^{4} \sqrt{|x-3|}\, dx.$

Integrales impropias

5. (a) Calcular, de ser posible (si no explicar por qué), las siguientes integrales $\forall p > 0$:

   $$\text{i. } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx \qquad \text{ii. } \int_0^{1} \frac{1}{x^p}\, dx \qquad \text{iii. } \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$$

   Sugerencia: Separar el estudio de las integrales en estos grupos $0 < p < 1$, $p = 1$ y $p > 1$.

(*b*) Relacionar los resultados obtenidos con el hecho de que para $x > 0$, x^{-p} y $x^{-\frac{1}{p}}$ son funciones inversas y, por lo tanto, el gráfico de una es el de la otra reflejado respecto de la recta $y = x$.

(*c*) ¿Para qué valores de $p > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge?.

6. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

(*a*) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

(*b*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

(*c*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx}\, dx$.

(*d*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx$.

(*e*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$.

(*f*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$.

(*g*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^3}$.

(*h*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^5}}\, dx$.

(*i*) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{dx}{(1 - x)^3}$.

(*j*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + \cos x}\, dx$.

(*k*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(2x)\, dx$.

(*l*) $\displaystyle\int_0^{4} \frac{x}{x^2 - 4}\, dx$.

(*m*) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{e^x}{\sqrt{-x^3 + 3x^2 - 2x}}\, dx$.

Calcular el valor principal en los ítems (*i*), (*k*) y (*l*).

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, ¿son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones?

(*a*) Si $f > 0$ es continua con $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}_{>0}$, entonces $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty$.

(*b*) Si $f > 0$ es continua con $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) \in \mathbb{R}_{>0}$, entonces $\displaystyle\int_0^{-\infty} f(x)\, dx = -\infty$

(*c*) Si f es continua y decreciente con $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(x)\, dx = 3$, entonces el $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(*d*) Si $f > 0$ es continua con $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(x)\, dx = 8$, entonces el $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(*e*) Si $f > 0$ es continua con $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, entonces $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx < +\infty$.

8. Analizar la convergencia de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(1 + x^2)} \quad (\forall p \in \mathbb{R}).$$

Integrales dobles

9. Sabiendo que $R := [0,1] \times [0,1]$ calcular las siguientes intergrales:

(a) $\displaystyle\iint_R (x^3+y^2)\,dxdy$

(b) $\displaystyle\iint_R ye^{xy}\,dxdy$

(c) $\displaystyle\iint_R (xy)^2\cos x^3\,dxdy$

(d) $\displaystyle\iint_R \ln[(x+1)(y+1)]\,dxdy$

(e) $\displaystyle\iint_R (x^m y^n)\,dxdy, \quad (m,n>0)$

(f) $\displaystyle\iint_R (ax+by+c)\,dxdy$

(g) $\displaystyle\iint_R \operatorname{sen}(x+y)\,dxdy$

(h) $\displaystyle\iint_R (x^2+2xy+yx^{1/2})\,dxdy$

10. Calcular el volumen del sólido acotado por los planos xz, yz, xy, $x=1$ y $y=1$, y la superficie $z=x^2+y^4$.

11. Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$ y $[c,d]$, respectivamente. Sabiendo que R es el rectángulo $[a,b]\times[c,d]$, mostrar que
$$\iint_R f(x)g(y)\,dxdy = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right).$$

12. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z=\operatorname{sen} y$, y los planos xy, $x=1,\ x=0$, $y=0$ e $y=\pi/2$.

13. Sean $F\in\mathcal{C}^2$ y $f(x,y):=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)$. Calcular $\displaystyle\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dxdy$ en términos de F.

14. Graficar las regiones determinadas por los límites de integración de las siguientes integrales y calcularlas.

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2} dydx$

(b) $\displaystyle\int_1^2\int_{2x}^{3x+1} dydx.$

(c) $\displaystyle\int_0^1\int_1^{e^x} (x+y)\,dydx$

(d) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^3}^{x^2} y\,dydx$

(e) $\displaystyle\int_{-3}^2\int_0^{y^2} (x^2+y)\,dxdy$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\,dydx$

(g) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dydx$

(h) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos x} y\operatorname{sen} x\,dydx$

(i) $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{y} (x^n+y^m)\,dxdy,\ (m,n>0)$

(j) $\displaystyle\int_{-1}^0\int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x\,dydx$

(k) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen} y} y\,dxdy$

(l) $\displaystyle\int_{-2}^0\int_{x^3}^{x+1} (y^2+1)\,dydx$

15. Sea $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por:
$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in\mathbb{Q} \\ 2y & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

Mostrar que la integral iterada $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dy\right] dx$ existe pero f no es integrable. ¿Existe la otra integral iterada?

16. Calcular el área de:

    (a) la región limitada por la recta $y = x$ y por la curva $y = x^2$.

    (b) la región formada por todos los puntos (x, y) tales que $|x| + |y| \leq a,\ a \geq 0$.

17. Calcular
$$\iint_T [x\text{sen}\, x + y\text{sen}\,(x+y)]\, dxdy$$
siendo T el triángulo de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(3, 3)$.

18. Sea D la región acotada por los semiejes positivos de x e y y la recta $3x + 4y = 10$. Calcular
$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

19. Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x = -4y^2 + 3$.

    Calcular
$$\iint_D x^3 y\, dxdy.$$

20. Calcular el volumen de un cono con radio de base r y altura h.

21. Calcular el volumen de las siguientes regiones:

    (a) R: encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 10$.

    (b) R: encerrada por el cono de altura 4 dado por $z^2 = x^2 + y^2$.

    (c) R: encerrada por las superficies $x^2 + y^2 = z$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

    (d) R: determinada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$ y $z \geq 2$.

22. Cambiar el orden de integración, graficar las regiones correspondientes y calcular la integral de ambas maneras.

    (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 xy\, dydx$

    (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{2-y} (x+y)^2\, dxdy$

    (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3x} x^2 y\, dydx$

    (d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2\, dxdy$

    (e) $\displaystyle\int_{-3}^3 \int_{-(9-y^2)^{1/2}}^{(9-y^2)^{1/2}} x^2\, dxdy$

23. Calcular $\int_D y^2 x^{1/2}\, dxdy$, con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > x^2, y < 10 - x^2\}$.

24. Sea D la región limitada por las rectas $y = 2$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$ e $y = 1$. Calcular la siguiente integral
$$\iint_D x^2 y \; dA.$$

25. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$. Calcular la siguiente integral
$$\iint_D \cos\left(\frac{x}{y}\right) \; dA.$$

26. Calcular $\displaystyle\int_T e^{x-y}\, dxdy$ donde T es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 3)$ y $(2, 2)$.

27. Sea T la región limitada por las rectas $y = x$, $y = \sqrt{2}$ y la curva $y = \sqrt{x}$. Calcular
$$\iint_R e^{\frac{x}{y}} \; dA.$$

Integrales triples

28. Calcular:
   (a) $\displaystyle\iiint_C (xyz + x^2y^2z^2)\, dV$, donde $C = [0, 1] \times [-3, 2] \times [-1, 1]$.
   (b) $\displaystyle\iiint_C (x \cos z + y \cos x + z \cos y)\, dV$, donde $C = [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi]$.

29. Calcular:
   (a) $\displaystyle\iiint_W x\, dV$, donde W es la región limitada por $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y $z = x^2 + y^2$.
   (b) $\displaystyle\iiint_W x^2 \cos z\, dV$, donde W es la región limitada por $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $x = 0$ y $x + y = 1$.
   (c) $\displaystyle\iiint_W dV$, donde W es la región limitada por $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 9 - x^2$.
   (d) $\displaystyle\iiint_W (x + y + z)\, dV$, donde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\| \leq 1\}$.
   (e) $\displaystyle\iiint_W (x^3 + y + z)\, dV$, donde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1], x^2 + y^2 \leq 1\}$.

30. Calcular $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x+y}^{x^2+y^2} dzdydx$ y graficar la región de integración.

31. Cambiar el orden de integración en

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x,y,z)\, dzdydx$$

para obtener las otras cinco formas de realizar la misma integración. Graficar la región de integración.

32. Sea $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\| \leq 1\}$. Demostrar que si f es una función continua en B, impar respecto de z (es decir $f(x,y,z) = -f(x,y,-z)$), entonces

$$\iiint_B f(x,y,z)\, dV = 0.$$

Dar otros ejemplos donde valga este resultado.

33. Sea W la región determinada por las condiciones $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ y $0 \leq z \leq xy$.

   (a) Hallar el volumen de W.

   (b) Calcular $\displaystyle\int_W x\, dxdydz$.

   (c) Calcular $\displaystyle\int_W y\, dxdydz$.

   (d) Calcular $\displaystyle\int_W z\, dxdydz$.

   (e) Calcular $\displaystyle\int_W xy\, dxdydz$.