

Álgebra I

Práctica 6 - Números Complejos

1. Para los siguientes $z \in \mathbb{C}$, hallar $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$, $\operatorname{Re}(z^{-1})$, $\operatorname{Im}(z^{-1})$, $\operatorname{Re}(-i \cdot z)$ e $\operatorname{Im}(i \cdot z)$

i) $z = (2 + i)(1 + 3i)$

v) $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^{179}$

ii) $z = 5i(1 + i)^4$

vi) $z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{-1}$

iii) $z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}i)^2(\overline{1 - 3i})$

vii) $z = \overline{1 - 3i}^{-1}$

iv) $z = i^{17} + \frac{1}{2}i(1 - i)^3$

2. Dados $z = 1 + 3i$ y $w = 4 + 2i$, representar en el plano complejo los siguientes números

i) z

v) $-z$

ix) \bar{z}

xiii) $|2z|$

ii) w

vi) $2z$

x) $\overline{3z + 2w}$

xiv) $|z + w|$

iii) $z + w$

vii) $\frac{1}{2}w$

xi) \bar{iz}

xv) $|z - w|$

iv) $z - w$

viii) iz

xii) $|z|$

xvi) $|\overline{w - z}|$

3. Calcular las raíces cuadradas de los siguientes números complejos z

i) $z = -36$

ii) $z = i$

iii) $z = -3 - 4i$

iv) $z = -15 + 8i$

4. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos

i) $3 + \sqrt{3}i$

iii) $(-1 - i)^{-1}$

v) $(-1 + \sqrt{3}i)^{-5}$

ii) $(2 + 2i)(\sqrt{3} - i)$

iv) $(-1 + \sqrt{3}i)^5$

vi) $\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}$

5. Graficar en el plano complejo

i) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / |z| \geq 2 \text{ y } \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{2\pi}{3}\}$.

ii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / \arg(-iz) > \frac{\pi}{4}\}$.

iii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / |z| < 3 \text{ y } \arg(z^4) \leq \pi\}$.

6. i) Determinar la forma binomial de $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i} \right)^{17}$.

ii) Determinar la forma binomial de $(-1 + \sqrt{3}i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

iii) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i)$.

7. Hallar en cada caso las raíces n -avas de $z \in \mathbb{C}$:

i) $z = 8, n = 6$

iv) $z = 2i(\sqrt{2} - \sqrt{6}i)^{-1}, n = 11$

ii) $z = -4, n = 3$

v) $z = (2 - 2i)^{12}, n = 6$

iii) $z = -1 + i, n = 7$

vi) $z = 1, n = 8$.

8. i) Calcular $w + \bar{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$.

ii) Calcular $w^{73} + \bar{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.

iii) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.

iv) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \overline{w^4} + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$.

9. Determinar las raíces n -ésimas *primitivas* de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 12 .

10. Sea w una raíz quinceava primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\text{i) } \sum_{i=0}^{n-1} w^{5i} = 0$$

$$\text{ii) } \sum_{i=2}^{n-1} w^{3i} = 0$$

11. i) Calcular la suma de las raíces n -ésimas primitivas de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 8, 10, 15$.

ii) Calcular la suma de las raíces p -ésimas primitivas de la unidad para p primo.

12. Sea w una raíz cúbica primitiva de la unidad y sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por

$$z_1 = 1 + w \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que z_n es una raíz sexta primitiva de la unidad para todo $n \in \mathbb{N}$

13. Probar que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad si y solo si \overline{w} lo es.

14. Sea w una raíz novena primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $w^{5n} = w^3$.

15. Sea $w \in G_{35}$ una raíz 35-ava primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{cases} w^{15n} = w^5 \\ w^{14n} = w^{21} \end{cases}$$

16. Sea G_{20} el conjunto de raíces 20-avas de la unidad y G_4 el conjunto de raíces cuartas de la unidad. Sea \sim la relación en G_{20} definida por

$$a \sim b \iff a = \omega b, \text{ para algún } \omega \in G_4,$$

o sea dos elementos están relacionados si uno es un múltiplo del otro por una raíz cuarta de la unidad.

i) Probar que \sim es una relación de equivalencia.

ii) ¿Cuántas clases de equivalencia hay en total?