

Práctica 3

1. Decir qué propiedades (abierto, cerrado, acotado) tienen los siguientes conjuntos:

- a) \mathbb{Q} .
- b) \mathbb{N} .
- c) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
- d) $(0, 1]$.
- e) $\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$.
- f) $\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Sean S, T subconjuntos de \mathbb{R} . Demostrar las propiedades siguientes:

- a) Si $S \subseteq T$ entonces $S^\circ \subseteq T^\circ$.
- b) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una intersección infinita?
- c) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. ¿Vale la igualdad?
- d) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?
- e) $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. ¿Vale la igualdad?
- f) $(\mathbb{R} \setminus S)^\circ = \mathbb{R} \setminus \overline{S}$.

3. En cada uno de los siguientes casos hallar S° , \overline{S} y ∂S .

- a) $S = [0, 1]$.
- b) $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
- c) $S = [-1, 0) \cup \{1\}$.
- d) $S = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.
- e) $\left\{ \frac{(-1)^n n}{1+n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.
- f) $S = \mathbb{Z}$.

4. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$. Demostrar :

- a) S es abierto si y solo si es disjunto con ∂S .
- b) S es cerrado si y solo si $\partial S \subset S$.
- c) S es cerrado si y solo si $S = S^\circ \cup \partial S$.

5. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$. Demostrar que $\partial S = \overline{S} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus S}$. Interpretar gráficamente.

6. Si $S \subseteq \mathbb{R}$, notamos con S' al conjunto de todos los puntos de acumulación de S .
- Hallar S' para cada uno de los conjuntos del Ejercicio 3.
 - Un punto $p \in S$ se dice *punto aislado* de S si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \cap S = \{p\}$. Demostrar que $\overline{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$.
7. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \{(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) : n, m \in \mathbb{N}\}$.
8. Hallar todos los subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} que son a la vez abiertos y cerrados.
9. Una función $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ se llama una norma si cumple que:
- $N((x, y)) = 0$ si y sólo si $(x, y) = (0, 0)$.
 - $N((\lambda x, \lambda y)) = |\lambda|N((x, y))$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - $N((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \leq N((x_1, y_1)) + N((x_2, y_2))$ para todo $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Sean

$$\begin{aligned}\|(x, y)\|_1 &= |x| + |y| \\ \|(x, y)\|_\infty &= \max\{|x|, |y|\}.\end{aligned}$$

Probar que las funciones $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son normas.

10. Una función $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ se llama una distancia si cumple que:
- $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0$ si y sólo si $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.
 - $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d((x_2, y_2), (x_1, y_1))$ para todo $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.
 - $d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) \leq d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d((x_2, y_2), (x_3, y_3))$ para todo $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$.
- (a) Demostrar que si N es una norma en \mathbb{R}^2 , entonces

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = N((x_1 - x_2, y_1 - y_2))$$

es una distancia en \mathbb{R}^2 .

11. Llamamos la bola de centro (x_0, y_0) y radio r asociada a una norma N al conjunto

$$B_N((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / N((x - x_0, y - y_0)) < r\}.$$

Cuando el centro es el origen $(0, 0)$ la bola correspondiente suele denotarse $B_N(r)$.

- Dibujar las bolas correspondientes a la norma euclídea y a las normas N_1 y N_∞ .
- Ver gráficamente que $B_1(r) \subset B_e(r) \subset B_1(\sqrt{2}r)$ y que $B_e(r) \subset B_\infty(r) \subset B_e(\sqrt{2}r)$.

- (c) Deducir contenciones análogas a las del ítem (b) entre las bolas correspondientes a las normas 1 e infinito.
- (d) Deducir las contenciones de los ítems (a), (b) y (c) analíticamente.
12. Decir qué propiedades (abierto, cerrado, acotado) tienen los siguientes conjuntos.
- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 1\}$.
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > y\}$.
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0\}$.
- (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$.
13. Decidir si las propiedades del Ejercicio 2 siguen siendo válidas si S y T son subconjuntos de \mathbb{R}^2 .
14. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. Hallar la adherencia \bar{S} .
15. Sea $U_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x, y) - (0, n)\| < n\}$. Demostrar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ es el semiplano superior abierto.
16. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se considera el intervalo abierto $I_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$. Demostrar que $(0, 1) = \bigcup_{n \geq 2} I_n$. ¿Existe un conjunto *finito* $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $(0, 1) = \bigcup_{n \in \mathcal{F}} I_n$? Justificar. ¿Qué puede decir sobre la compacidad del conjunto $(0, 1)$?
17. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son compactos:
- a) \mathbb{Q} .
- b) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
- c) \mathbb{R} .
- d) $[0, 1] \cup [100, 1000]$.
- e) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
- f) $\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
18. Sea K un subconjunto compacto de \mathbb{R} . Probar que K tiene mínimo y máximo.
19. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada y sea P el conjunto de sus puntos límite. Probar que P es compacto. Mostrar que el límite inferior de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es el mínimo de P y el límite superior de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ el máximo.
20. Sean $S, T \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos compactos. Demostrar que $S \cup T$ y $S \cap T$ son compactos. ¿Qué ocurre si se toman uniones o intersecciones infinitas?
21. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$. Demostrar que S es compacto si y sólo si toda sucesión contenida en S contiene una subsucesión que converge a un punto de S .
22. Mostrar que si K es compacto y F es cerrado, entonces $K \cap F$ es compacto.
23. Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto. Probar que los siguientes conjuntos también son compactos:
 $S = \{x + y : x, y \in K\}$, $P = \{x \cdot y : x, y \in K\}$.