Nombre y apellido.. Número de libreta...................

Por favor, al finalizar el examen señale claramente aquí qué ejercicios entrega

Entrego ejercicios 1 2 3 4

(Reservado para el corrector):

1	2	3	4	Nota

Por favor, resuelva cada ejercicio en hojas separadas. Numere todas las hojas y coloque en cada una su nombre y apellido. *Para aprobar es necesario tener al menos 60 puntos. Justifique todas sus respuestas.*

1. (25 puntos) Se tiene una urna con 7 bolitas rojas y 3 azules. Se tiene una moneda no equilibrada con probabilidad p de que salga cara, $0 < p < 1$. Se efectúa el siguiente experimento:

   - Se arroja la moneda. Si sale cara, se agregan dos bolitas azules a la urna. Caso contrario, se deja la urna como está.
   - Se extrae una bolita de la urna, si es roja se la devuelve a la urna. Caso contrario, se la retira.
   - Se vuelve a extraer una bolita de la urna.

   a) (9 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda bolita sea roja.

   b) (8 puntos) Sabiendo que la segunda bolita resultó ser roja, calcular la probabilidad de que la moneda haya salido cara.

   c) (8 puntos) Sean los eventos C=“la moneda es cara” y R_1=“la primer bolita es roja”. Hallar, si existe, un valor $0 < p < 1$ para que ambos eventos sean independientes.

2. (25 puntos) A un operario se le paga, por cada jornada diaria, en función de la cantidad de pedidos que debe atender. La cantidad de pedidos que llegan en una jornada es una variable aleatoria de Poisson. Se sabe que la probabilidad de que no llegue ningún pedido en una jornada es de e^{-4}. Al operario se le paga \$50 por cada pedido atendido, salvo que atienda 4 pedidos o más, en cuyo caso se le paga un monto fijo de \$200. Sea Y ="sueldo recibido en una jornada determinada".

   a) (9 puntos) Hallar p_Y y $E(Y)$.

   b) (7 puntos) En una semana determinada, compuesta de 5 días hábiles, calcular la probabilidad de que haya percibido al menos en tres días el monto de \$200.

   c) (9 puntos) Empezando en un día determinado, calcule la probabilidad de que tenga que esperar 10 o más días para poder recibir en tres días distintos el monto de \$200. Atención: no haga cuentas innecesarias, se tomarán en cuenta a la hora de calificar el problema.

3. (25 puntos) Se tiene una caja con 10 lámparas de tipo A y 6 de tipo B. La duración de las lámparas de tipo A, en meses, está dada por una variable aleatoria X con distribución exponencial con **media** 6. La duración de las lámparas de tipo B, también en meses, está dada por una variable aleatoria continua Y con la siguiente densidad:

$$f_Y(y) = ky(10-y)I_{(0,10)}(y).$$

   a) (5 puntos) Halle el valor de k para que f_Y sea efectivamente una densidad.

   b) (5 puntos) Calcule las funciones de distribución acumuladas de X y de Y y la mediana (o sea el percentil 0,5) de X.

   c) (7 puntos) Se extrae al azar una lámpara de la caja y se la prueba, obteniéndose que la duración de la misma es mayor o igual a 4 meses. ¿Cuál es la probabilidad de que dure 7 o más meses?

   d) (8 puntos) Calcule la densidad de la variable aleatoria $W = 100 - Y^2$.

4. (25 puntos) Se tira una moneda equilibrada 3 veces, siendo X el número de caras. Si $X = a$ se extraen sin reposición $a+1$ bolillas de una urna que contiene 4 bolillas blancas y una roja. Sea Y el número de bolillas rojas extraídas.

   a) (5 puntos) Hallar la distribución de Y dado $X = a$, para $a = 0, 1, 2, 3$.

   b) (5 puntos) Obtener una tabla con la distribución conjunta del par (X, Y) y hallar la función de probabilidad puntual marginal p_Y.

   c) (5 puntos) Calcular $E(X-Y)$ y $V(X-Y)$.

   d) (5 puntos) ¿Son X e Y independientes? Justifique

   e) (5 puntos) Si se extrajeron 2 bolillas blancas, ¿cuál es la probabilidad de que hayan salido dos caras?