

## MATEMATICA 2 - Verano 2018

### Práctica 6 - Diagonalización

1. Para las matrices  $A$  siguientes, calcular el polinomio característico, los autovalores y bases y dimensiones de los espacios de autovectores correspondientes a cada autovalor (analizar por separado los casos  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$ ). En cada caso decidir si la matriz es diagonalizable, y de ser posible, exhibir una matriz  $P$  inversible tal que  $P^{-1}AP$  sea diagonal.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Como en el ejercicio anterior, discutiendo según los valores de los parámetros  $a, b, c \in \mathbb{R}$  (analizar por separado los casos  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$ ).

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

3. Hallar todos los valores de  $k \in \mathbb{R}$  tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+k^2 & -k^2 \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

4. Sea  $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que para toda fila  $F_i$ , la suma de sus coeficientes es igual a 1.

Probar que 1 es autovalor de  $A$  y encontrar un autovector correspondiente.

5. Sea  $f : K^n \rightarrow K^n$  un proyector con  $\dim(\text{Im}(f)) = s$ . Probar que  $f$  es diagonalizable y calcular el polinomio característico  $\chi_f$  de  $f$ .

6. Calcular  $A^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  para las siguientes matrices  $A$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Determinar en cada caso si es posible encontrar  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $B^2 = A$ . ¿Y en  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ ?

7. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-7y + z, 4y, -2x + y + 3z).$$

- a) Encontrar una base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $[f]_{\mathcal{B}}$  sea diagonal.
- b) Calcular  $f^n := f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $n$  veces),  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- c) Hallar, si es posible, una transformación lineal  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $g \circ g = f$ .

8. Encontrar una fórmula general para  $x_n$  e  $y_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_0$ , en función de  $x_0$  e  $y_0$  (ecuaciones en diferencias):

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}.$$

9. Se define una sucesión de números enteros de la siguiente manera:

$$a_0 := 1, \quad a_1 := 2 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, \quad \forall n \geq 0.$$

- a) Determinar  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que para todo  $n \geq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}.$$

- b) Usando lo anterior mostrar que para todo  $n \geq 0$  se tiene

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- c) Diagonalizando la matriz  $A$  determinar el valor de  $a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

10. Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  con autovalores  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{4}{5}$ . Para un vector inicial  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ , se define  $x^{(n)} = A^n x^{(0)}$ . Probar que para todo  $x^{(0)}$  se cumple  $x^{(n)} \rightarrow 0$  (es decir,  $x_i^{(n)} \rightarrow 0$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ).

11. Supongamos que en cierta especie hay una epidemia en la que al cabo de cada mes se enfermó la mitad de los que están sanos a principios de mes y murió la cuarta parte de los que estaban enfermos. Llamemos  $x_k$  al número de muertos al cabo del  $k$ -ésimo mes,  $y_k$  al número de enfermos al cabo del  $k$ -ésimo mes y  $z_k$  al número de sanos al cabo del  $k$ -ésimo mes.

- a) Determinar  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  que describa el proceso, o sea tal que

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}.$$

- b) Si la distribución original  $(x_0, y_0, z_0)$  al principio del primer mes (o término del mes 0) es  $(0, 0, 10000)$ , o sea de ningún enfermo y 10000 sanos, calcular el número de enfermos al cabo del  $k$ -ésimo mes.

- c) Probar que cualquiera sea la distribución original  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $(x_k, y_k, z_k)$  tiende a un múltiplo de  $(1, 0, 0)$  (determinarlo en función de  $(x_0, y_0, z_0)$ ), es decir mueren todos (lo cual es obvio ya que se enferman o se mueren pero ni se curan ni nacen nuevos individuos en el modelo).

12. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

$$a) \begin{cases} x'(t) = 8x(t) + 10y(t) \\ y'(t) = -5x(t) - 7y(t) \end{cases}.$$

$$b) \begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}, \quad \text{con condiciones iniciales } x(0) = 3, y(0) = -1.$$

13. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

$$a) \text{ Calcular } A^{1000} \text{ para } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Dada  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ , expresar  $A^{-1}$  como combinación lineal de  $A$  y de  $I_2$ .

14. Encontrar una tercera columna para que la matriz  $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  sea ortogonal siendo

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & * \end{pmatrix}.$$

¿Cuántas soluciones hay? Interpretar geoméricamente.

15. Encontrar  $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ortogonal con  $\det(U) = -1$ .

16. Encontrar una tercer fila para que la matriz  $U \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$  sea unitaria siendo

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3i}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & i \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

17. Para todos los casos de los ejercicios anteriores donde la matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a diagonalizar es simétrica, determinar una matriz ortogonal  $U$  tal que  $U^t A U$  es diagonal.

18. Encontrar una matriz  $U \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$  unitaria tal que  $\overline{U}^t A U$  sea diagonal para la matriz  $A$  siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2i & 1 \\ -2i & 3 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$

19. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , rotación de ángulo  $\frac{\pi}{3}$ .

b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , simetría respecto de la recta de ecuación  $x_1 - x_2 = 0$ .

20. Determinar y clasificar todas las transformaciones ortogonales  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tales que  $f(3, 4) = (5, 0)$ .

21. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

a)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , simetría respecto del plano de ecuación  $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ .

b)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , rotación de ángulo  $\frac{\pi}{4}$  y eje  $\langle (1, 0, 1) \rangle$ .

22. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una rotación de eje  $\langle (2, -2, -1) \rangle$  y ángulo  $\pi/2$ . Hallar  $f(4, -1, 1)$ .

23. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Decidir si  $f$  es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

24. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es  $\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$ .

a) Probar que  $f$  es una rotación.

b) Hallar una transformación lineal  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $g \circ g = f$ .

25. Hallar una rotación  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(\sqrt{2}/2, 1, -\sqrt{2}/2) = (0, \sqrt{2}, 0)$ .

26. Hallar una simetría  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(2, -1, 2) = (0, 3, 0)$ .

27. Determinar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

28. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}.$$

Probar que para todo  $v \in \mathbb{R}^2$ , se tiene  $\|Av\| \geq 15\|v\|$ .

29. Hallar la matrices de rango 1 y 2 más cercanas, con la distancia en  $\mathbb{R}^{n \times n}$  dada por  $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(AA^t)}$ , a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

30. *Descomposición polar de una matriz (\*)*

a) Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Probar que  $A$  admite una descomposición en la forma  $A = QP$  donde  $Q, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satisfacen que  $Q$  es una matriz ortogonal y  $P$  es una matriz simétrica semidefinida positiva (es decir  $v^t P v \geq 0$  para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ ).

b) Calcular la descomposición polar de  $A = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$ .