Complementos de MATEMATICA 2 - Verano 2018

Práctica 4 - Producto interno

En lo que sigue, $\langle\ ,\ \rangle$ denota el producto interno canónico si no está especificado, y se considera la norma que define ese producto interno.

1. Calcular la norma de cada uno de los vectores siguientes, y normalizarlos

   a) $u = (0, 1, 2)$, $v = (-1, 1, 1)$, $w = 3u$ y $z = u + v$

   b) $u = (i, 0, 0)$, $v = (1, 0, i)$

2. Determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos

   a) $A = (1, 2, 3)$, $B = (4, 1, -2)$

   b) $A = (i + 1, i, i)$, $B = (1, i, 0)$

3. *a*) Sean $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, -1, 1)$. Hallar $w \in \mathbb{R}^3$, $w \neq 0$ tal que $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$. ¿Es único?

   b) Sea $u = (1, -1)$. Hallar todos los $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle u, v\rangle = 0$.

   c) Sea $u = (0, 0, 2)$. Hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle v, u\rangle = 0$.

   d) Sean $u = (1, 2)$, $v = (-1, 1)$ y $w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\langle u, w\rangle = 1$ y $\langle v, w\rangle = 3$. Hallar w.

4. Decidir si son o no ciertas las siguientes proposiciones en K^n, $n \geq 2$:

   a) Si $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$ para algún $u \neq 0$, entonces $v = w$.

   b) Si $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$, $\forall\ u \in K^n$, entonces $v = w$.

5. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales o no

   a) $v = (1, 1, 1), w = (1, 0, 1)$

   b) $v = (1, -2, 4), w = (-2, 1, 1)$

   c) $v = (1, i, 1), w = (i, 0, 1)$

   d) $v = (1, i, 1), w = (i, 1, 0)$

6. Calcular el ángulo entre los siguientes pares de vectores

   a) $v = (1, 1), w = (1, 0)$

   b) $v = (3, 2, -1), w = (0, 1, 2)$

7. Para $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, se define $\langle x, y\rangle_A = 4x_1y_1 + 5x_2y_2$.
   Encontrar una matriz inversible $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\langle x, y\rangle_A = (Ax)^t(Ay) = \langle Ax, Ay\rangle$ y deducir que $\langle , \rangle_A$ es un producto interno.

8. Se considera en $\mathbb{R}^3$ el producto interno definido por $\langle x, y\rangle_A = (Ax)^t(Ay) = \langle Ax, Ay\rangle$ para
   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcular la norma del vector $(2, 1, -1)$ con respecto a ese producto interno.

   b) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ para dicho producto interno.

9. Sea la recta $S = \langle (3, 4)\rangle \subseteq \mathbb{R}^2$ y p la proyección ortogonal sobre S. Hallar:

   a) El complemento ortogonal $S^\perp$ de S.

b) $p(3,4)$, $p(-4,3)$ y $p(2,1)$.

c) El punto más cercano de la recta S a cada uno de los puntos $(3,4)$, $(-4,3)$ y $(2,1)$, y la distancia de esos puntos a la recta S.

d) Una fórmula explícita para $p(x_1,x_2)$ y la matriz $[p]_{\mathcal{E}}$ de p en la base canónica $\mathcal{E}$.

e) Una base ortonormal $\mathcal{B}$ tal que $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. *a*) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(-1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B}'$.

    b) Calcular las coordenadas de $v = (1,1,1)$ y de $w = (1,0,0)$ en $\mathcal{B}'$.

    c) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base del plano

    $$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

    y definir explícitamente la proyección ortogonal sobre ese plano.

    d) Calcular el punto de S más cercano a w, y la distancia que los separa. Ídem para v.

11. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(0,i,0);(1,0,i);(0,0,1)\}$ de $\mathbb{C}^3$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B}'$.

12. Para los subespacios siguientes hallar el complemento ortogonal, y definir las proyecciones ortogonales sobre esos subespacios

    a) $\langle(1,2,1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$

    b) $\{x \in \mathbb{R}^3 / 3x_1 + x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

    c) $\langle(i,1,1),(-1,0,i)\rangle \subseteq \mathbb{C}^3$

    d) $\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4 \,/ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i)x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. \right\} \subseteq \mathbb{C}^4$.

13. Sea $S = \langle(1,1,0,-1),(-1,1,1,0),(2,-1,1,1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Hallar el punto de S más cercano a $(0,1,1,0)$, y la distancia de $(0,1,1,0)$ a S.

14. En $\mathbb{C}^{3\times 3}$ con el producto interno $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^*B)$, hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales, i.e. las matrices con coeficientes todos nulos fuera de la diagonal principal.

15. En $\mathbb{R}_2[X]$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$,

    a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1,\ X,\ X^2\}$.

    b) Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = \langle 1\rangle$.

    c) Hallar el polinomio constante más cercano a X y el más cercano a X^2.

16. *a*) En $\mathcal{C}([-1,1])$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$, hallar el polinomio de grado menos o igual a 2 más próximo a la función $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$.

    b) En $\mathcal{C}([0,\pi])$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_{0}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$,

    1) aplicar el proceso de Gram-Schmidt al conjunto $\{1,\cos x,\mathrm{sen}\,x\}$.

    2) hallar el el elemento de $\langle 1,\cos x,\mathrm{sen}\,x\rangle$ más próximo a la función $f(x) = x$.

17. *a*) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Probar que $N(A)$ es ortogonal al espacio columna $E_C(A)$.

    b) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz hermitiana, es decir tal que $A^* = A$. Probar que $N(A)$ es ortogonal a $E_C(A)$.

18. Considerese el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = & 4 \\ x_1 & = & 5 \\ x_1 + x_2 & = & 9 \end{cases}$$

i) Verificar que el sistema NO tiene solución y encontrar $x \in \mathbb{R}^2$ tal que el error $e = ||Ax - b||_2^2$ sea mínimo (A es la matriz del sistema).

ii) Encontrar la proyeccion ortogonal de b sobre el espacio columna de A.