MATEMÁTICA 2 - Verano 2018

Práctica 3 - Transformaciones lineales

1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

    a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\;\; f(x_1,x_2)=(x_1-x_2,\,2x_2,\,1+x_1)$

    b) $f:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R},\;\; f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

    c) $f:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 3},\;\; f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12}+a_{21}\\ 0 & a_{11} & a_{22}-a_{11}\end{pmatrix}$

    d) $f:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}^3,\;\; f(p)=(p(0),p'(0),p''(0))$

2. Interpretar geométricamente las siguientes transformaciones lineales $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.

    a) $f(x,y)=(x,0)$

    b) $f(x,y)=(x,-y)$

    c) $f(x,y)=(x\,\cos t-y\,\operatorname{sen} t, x\,\operatorname{sen} t+y\,\cos t)$, con $t\in\mathbb{R}$ fijo.

3. Probar que las siguientes funciones son transformaciones lineales:

    a) $\operatorname{tr}:K^{n\times n}\to K$, $\operatorname{tr}(A)=\sum_{i=1}^n A_{ii}$

    b) $f:K^{n\times m}\to K^{r\times m},\;\; f(A)=BA$ donde $B\in K^{r\times n}$ está fija

    c) $\delta:\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\to\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\;\; \delta(f)=f'$

    d) $\Phi:\mathcal{C}([0,1])\to\mathcal{C}([0,1]),\;\; \Phi(f)(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

    e) $\epsilon_\alpha:K[X]\to K,\;\; \epsilon_\alpha(f)=f(\alpha)$, donde $\alpha\in K$

4. *a*) Mostrar que existe una transformación lineal $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1)=(-5,3)$ y $f(-1,1)=(5,2)$, y que es única. Para dicha f, determinar $f(5,3)$ y $f(-1,2)$.

    b) ¿Existe una transformación lineal $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1)=(2,6)$; $f(-1,1)=(2,1)$ y $f(2,7)=(5,3)$?

    c) Sean $f,\,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

    $$\begin{aligned} &f(1,0,1)=(1,2,1), \quad f(2,1,0)=(2,1,0), \quad f(-1,0,0)=(1,2,1),\\ &g(1,1,1)=(1,1,0), \quad g(3,2,1)=(0,0,1), \quad g(2,2,-1)=(3,-1,2). \end{aligned}$$

    Determinar si $f=g$.

    d) Hallar todos los $a\in\mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1,-1,1)=(2,a,-1)$, $f(1,-1,2)=(a^2,-1,1)$ y $f(1,-1,-2)=(5,-1,-7)$.

5. *a*) Calcular el núcleo y la imagen de cada una de las tranformaciones lineales de los ejercicios 1 y 2. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1}.

    b) Decidir si las transformaciones lineales tr y ϵ_α del Ejercicio 3 son epimorfismos, monomorfismos o isomorfismos.

6. Sea $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

    $$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2+x_3+x_4,x_1+3x_2+2x_3+4x_4,2x_1+x_3-x_4)$$

    Calcular $\operatorname{Nu}(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$, y determinar el conjunto

    $$\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\;:\;f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(2,0,6)\}.$$

7. Sea $S = \langle (1,1,0,1),(2,1,0,1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = S$.

8. *a*) ¿Existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ epimorfismo? ¿Y un epimorfismo $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}_4[X]$?
   ¿Existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ monomorfismo?
   ¿Y un monomorfismo $f : \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \mathrm{tr}(A) = 0\} \to \{g \in \mathbb{R}_3[X] : g(1) = g'(1) = 0\}$?
   b) ¿Existe alguna t.l. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\} \subset \mathrm{Im}(f)$?
   c) ¿Existe algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$, donde $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, 2x_1 + x_4 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\}$?

9. Determinar si existe (y en caso afirmativo hallarla) una t.l. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que satisface $\mathrm{Nu}(f) = S$ e $\mathrm{Im}(f) = T$ en los siguientes casos:
   a) $S = \langle (1,2,1)\rangle$, $T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \,/\, x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$,
   b) $S = \langle (1,-2,1)\rangle$, $T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \,/\, x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\}$.

10. En cada uno de los siguientes casos definir una t.l. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga lo pedido
    a) $(1,1,0) \in \mathrm{Nu}(f)$ y $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.
    b) $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \langle (1,1,2)\rangle$.
    c) $\mathrm{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
    d) $f \neq 0$ y $\mathrm{Nu}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

11. Calcular el rango de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \text{ para cada } k \in \mathbb{R} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Determinar el núcleo y la imagen de f, de g y de $g \circ f$, y decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

13. En cada uno de los siguientes casos definir una t.l. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga lo pedido
    a) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$.
    b) $f \neq \mathrm{Id}$ y $f \circ f = \mathrm{Id}$.

14. *a*) Para $t = \pi$ en el Ejercicio 2.c), calcular f^2.
    b) Hallar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f \neq \mathrm{Id}$, tal que $f^3 = \mathrm{Id}$.
    c) Hallar $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A \neq \mathrm{Id}$, tal que $A^3 = \mathrm{Id}$. ¿Y en $\mathbb{R}^{3\times 3}$?

15. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_2, -x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, x_1 - x_2)$$

    y sean las bases $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ y
    $\mathcal{B}' = \{(1,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,1,-1)\} \subset \mathbb{R}^4$.
    a) Calcular $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.
    b) Calcular $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

c) Calcular las matrices inversibles $Q \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ y $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = Q[f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}P$ donde $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente. ¿Cuáles son?

16. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3).$$

a) Determinar bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tales que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Si A es la matriz de f en la base canónica, calcular su rango y encontrar matrices inversibles Q y P tales que $QAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) ¿Existe una base $\mathcal{B}''$ de $\mathbb{R}^3$ para la cual $[f]_{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

17. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Hallar $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base $\mathcal{B}'$?

b) Hallar una base de $\mathrm{Nu}(f)$ y una base de $\mathrm{Im}(f)$.

c) Describir el conjunto $\{v \in \mathbb{R}^3 \,:\, f(v) = w_1 - 3w_3 - w_4\}$.

18. Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + 2x_2 + x_3),$$

a) Calcular $[f]_{\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$.

b) Verificar que f es un isomorfismo.

c) Exhibir una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[f]_{\mathcal{E}}P$. ¿Cuál es?

19. Para las siguientes $f : V \to V$, calcular $[f]_{\mathcal{E}}$, donde $\mathcal{E}$ es la base canónica

a) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$, $\mathcal{E} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$.

b) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f(A) = A^t$, $\mathcal{E} = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$.

20. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3)$. Probar que f es un proyector (i.e. $f \circ f = f$) y encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ en la cual $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

21. En cada uno de los siguientes casos construir, si es posible, un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla lo pedido

a) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle(-2, 1, 1)\rangle$

b) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, 3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle(1, 1, 1)\rangle$

y en caso que sea posible encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea una matriz diagonal con solo 1 o 0 en la diagonal.