

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Verano de 2018

Práctica 1 - Operaciones vectoriales

1. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 3)$ y $\vec{w} = (-1, -2)$ calcular analítica y gráficamente las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \vec{u} + \vec{v}; & \vec{v} + \vec{w}. \\ \text{(c)} 3\vec{u} + 3\vec{v}; & 3(\vec{u} + \vec{v}). \\ \text{(b)} (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}; & \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}). \\ \text{(d)} \vec{u} - \vec{v}. \end{array}$$

2. Sea $\vec{w} = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$. Graficar en el plano:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} L = \{t \cdot \vec{w} : t \in \mathbb{R}\}. \\ \text{(b)} L = \{t \cdot \vec{w} : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}. \\ \text{(c)} L = \{t \cdot \vec{w} : t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}. \end{array}$$

3. Dados los vectores $\vec{u} = (0, 1, 2)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (-1, 1, 1)$ calcular las operaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \vec{u} + \vec{v}. & \text{(d)} 2\vec{u}. \\ \text{(b)} \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}. & \text{(e)} -3\vec{w}. \\ \text{(c)} \vec{u} - \vec{v}. & \text{(f)} -\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}. \end{array}$$

4. En el bioterio observamos que el día primero de julio había 322 ratas de cepa α , 148 de cepa β y 290 de cepa γ . Durante el mes de julio se produjeron 104 nacimientos de cepa α , 48 de cepa β y 110 de cepa γ . A su vez murieron 220 animales, repartidos ordenadamente en 79 de la primera cepa, 51 de la segunda y 90 de la última cepa. Calcular el vector PI de población inicial, el vector N_7 de natalidad durante julio, el vector M_7 de mortalidad durante el mismo mes y el vector PF de población final al terminar el mes.

5. Calcular analítica y gráficamente el punto medio entre $P = (1, 4)$ y $Q = (3, 2)$.

6. Dados los puntos $A = (1, 7, 3)$, $B = (-1, 3, 0)$ y $C = (3, -4, 11)$ determinar:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \text{ los vectores } \overrightarrow{AB} = B - A \text{ y } \overrightarrow{BC} = C - B. \\ \text{(b)} \text{ el punto medio entre los puntos } A \text{ y } B. \end{array}$$

7. Dados los vectores $\vec{v} = (1, -2, 2)$, $\vec{w} = (2, 0, 3)$ y $\vec{z} = (4, 4, 4)$ realizar las operaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \vec{v} \cdot \vec{w}; & \vec{w} \cdot \vec{v}. \\ \text{(b)} (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{z}; & (\vec{v} \cdot \vec{z}) + (\vec{w} \cdot \vec{z}). \\ \text{(c)} (3\vec{v}) \cdot \vec{w}; & 3(\vec{v} \cdot \vec{w}). \\ \text{(d)} \vec{v} \cdot \vec{v}; & \vec{w} \cdot \vec{w}. \end{array}$$

8. Calcular el módulo (o norma) de los vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ según corresponda:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \vec{u} = (1, 2), \vec{v} = (-1, -2), \vec{w} = (-3, 4), \vec{z} = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right). \\ \text{(b)} \vec{u} = (0, 1, 2), \vec{v} = (-1, 1, 1), \vec{w} = (0, 1, 2) + (-1, 1, 1). \\ \text{(c)} \vec{u} = (2, -1, 3), \vec{v} = -2 \cdot (2, -1, 3), \vec{w} = 2 \cdot (2, -1, 3). \end{array}$$

9. Normalizar cada uno de los vectores del ejercicio anterior.

10. Determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos:
- (a) $A = (1, -3)$; $B = (0, 0)$. (c) $A = (1, 2, 3)$; $B = (4, 1, -2)$.
 (b) $A = (1, -3)$; $B = (4, 1)$. (d) $A = (4, -2, 6)$; $B = (3, -4, 4)$.
11. Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ que verifican:
- (a) $\vec{v} = (4, k)$ y $\|\vec{v}\| = 5$.
 (b) $\vec{v} = (1, k, 0)$ y $\|\vec{v}\| = 2$.
 (c) $\vec{v} = k \cdot (2, 2, 1)$ y $\|\vec{v}\| = 1$.
 (d) $A = (1, 1, 1)$, $B = (k, -k, 2)$ y $d(A, B) = 2$.
12. Sea $C = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Graficar en el plano los siguientes conjuntos:
- (a) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A\| = 1\}$. (c) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A - C\| = 1\}$.
 (b) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A\| \leq 1\}$. (d) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A - C\| \leq 1\}$.
13. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales (perpendiculares) o no:
- (a) $\vec{v} = (1, 1)$; $\vec{w} = (-2, 2)$. (c) $\vec{v} = (1, 1, 1)$; $\vec{w} = (1, 0, 1)$.
 (b) $\vec{v} = (2, -3)$; $\vec{w} = (0, 0)$. (d) $\vec{v} = (1, -2, 4)$; $\vec{w} = (-2, 1, 1)$.
14. Hallar:
- (a) Tres vectores en el plano, distintos entre sí, que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (2, 3)$. ¿Qué relación encuentra entre los vectores hallados? Graficar.
 (b) Todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que son ortogonales a $\vec{v} = (2, -2)$ y tienen norma 1.
 (c) Tres vectores de $\mathbb{R}^3$, distintos entre sí, que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (1, 3, -4)$.
 (d) Un vector de $\mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ y de norma 2. ¿Es único?
 (e) Dos vectores ortogonales a $\vec{v} = (3, 2, 7)$ que no sean colineales (es decir, que no sean uno múltiplo del otro).
15. Hallar el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:
- (a) $\vec{v} = (1, 0)$; $\vec{w} = (0, 1)$. (c) $\vec{v} = (1, 2)$; $\vec{w} = (-2, 1)$.
 (b) $\vec{v} = (1, 1)$; $\vec{w} = (0, 1)$. (d) $\vec{v} = (1, -1, 0)$; $\vec{w} = (0, 1, 1)$.
16. Dados $\vec{u} = (3, 2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$ determinar:
- (a) el ángulo entre ambos vectores.
 (b) el módulo de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.
17. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^3$ dos vectores que verifican $\|\vec{u}\| = 1$ y $\|\vec{v}\| = 3$. ¿Es posible que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$? Justificar.
18. Calcular el producto vectorial $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ para los siguientes pares de vectores:
- (a) $\vec{u} = (1, -2, -4)$; $\vec{v} = (1, -2, -4)$. (c) $\vec{u} = (2, 1, -3)$; $\vec{v} = (1, -2, -4)$.
 (b) $\vec{u} = (1, -2, -4)$; $\vec{v} = (2, 1, -3)$. (d) $\vec{u} = (2, 0, 0)$; $\vec{v} = (0, 0, 3)$.
 En cada caso, verificar que $\vec{w}$ es ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.
19. Sean $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (-1, 5, 2)$, $\vec{w} = (1, 2, 4)$ y $\vec{z} = (2, -4, 8)$. Hallar en $\mathbb{R}^3$:
- (a) un vector no nulo que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Es único?
 (b) todos los vectores que son, simultáneamente, ortogonales a $\vec{w}$ y $\vec{z}$.
 (c) un vector de norma 2 que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{w}$ y $\vec{z}$. ¿Es único?