Análisis I – Matemática I – Análisis II (C) – Análisis Matemático I (Q)
Verano - 2018

Práctica 5:
Extremos

1. Sea $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$, calcular máximos y mínimos absolutos en el intervalo [-5,5]. Hacer un gráfico aproximado de la función.

2. La empresa Pejsi quiere fabricar "Narajsi", un nuevo producto sabor naranja que saldrá al mercado envasado en latitas de volumen V. ¿Cuál debe ser la relación entre el radio de la base y la altura de la lata para que Pejsi minimize el costo de aluminio?

3. (a) Calcular los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^4$ y de $g(x, y) = x^4 + y^4$, y en dichos puntos sus hessianos.

   (b) Sea f de clase C^2 tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$, ¿es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?.

4. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y analizar cuáles son puntos de ensilladura:

   (a) $f(x, y) = x^2 - y^2$

   (b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x$

   (c) $f(x, y) = xy$

   (d) $f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2 y}} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases}$

5. Sea $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$. Probar que:

   (a) $(0, 0)$ es un punto de ensilladura.

   (b) el determinante de la matriz $Hf(0, 0)$ es cero.

   (c) f tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$ sobre cada recta que pase por $(0, 0)$, es decir, si $g(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a, b.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

   (a) Probar que $(0, 0)$ es un punto crítico pero no un extremo.

   (b) Probar que $\pm\sqrt{2}(1, -1)$ son mínimos absolutos. ¿Hay máximos relativos?

7. Para las siguientes funciones, encontrar los puntos críticos y analizar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos de ensilladura.

   (a) $f(x, y) = (2x + 1 - y)^2$

   (b) $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$

(c) $f(x,y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1$

(d) $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$

(e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + xy$

(f) $f(x,y) = (x-y)^2 + 1 + 2(x-y)$

(g) $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

(h) $f(x,y,z) = xy + z^2$

(i) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2xz + z$

(j) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$

(k) $f(x) = \dfrac{1}{1+||x||^2}, \ \ x \in \mathbb{R}^n$

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que:

   - $f(0,1) = 0$,
   - $\nabla f(0,1) = (0,2)$,
   - $Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x,y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$,

   (a) Calcular $Hg(0,1)$.

   (b) ¿Tiene g un extremo relativo en $(0,1)$?.

9. Sea $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3yx^2$.

   (a) Probar que el punto $(0,0)$ es punto crítico de f y calcular el hessiano en dicho punto.

   (b) Probar que f a lo largo de cualquier recta que pase por el origen tiene un mínimo en 0.

   (c) Muestre que el origen es punto silla de f y analice porqué esto no contradice al ítem anterior.
   Sugerencia: considere la curva $\alpha(t) = (t, \frac{3}{2}t^2)$.

10. Decidir si existen o no, números reales a y b tales que la función

$$f(x,y) = e^{y^4-x^2} + a(x-y) + b(x-2)(y-1)$$

   tenga un mínimo relativo en el punto $(2,1)$.

11. Si el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x,y)$ en $(0,0)$ es

$$P(x,y) = 1 + 2x - y + xy - x^2 + y^2,$$

   ¿tiene

$$g(x,y) := f(x,y) - 2x + y + x^2y$$

   un mínimo local en $(0,0)$?