Análisis I – Matemática I – Análisis II (C) – Análisis Matemático I (Q)
Verano 2018

Práctica 1: Preliminares

1. Resolver las siguientes inecuaciones:

   $(a)\ |x+3| < 1$ $(b)\ |3x-1| < |x-1|$ $(c)\ |x-3| \geq 1$

   $(d)\ |x| > |x+3|$ $(e)\ \left|\dfrac{x-2}{3x+1}\right| \leq 1$

2. Representar los siguientes conjuntos en la recta real:

   $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| < 1, x \notin \mathbb{Z}\}$
   $B = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| < |2-x|\}$
   $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x^2 \leq x^3\}$
   $D = \{x \in \mathbb{R} : |x+3| + |x-9| > 2\}$
   $E = \{x \in \mathbb{R} : \big||x+2| - |x-1|\big| < 1\}$
   $F = \{x \in \mathbb{R} : |x^3-1| + |2-x^3| = 1\}$

3. Suponiendo que $a \geq 0$ determinar para qué valores de $b \in \mathbb{R}$ se verifican cada una de las siguientes condiciones:

   $(a)\ |a+b| = |a| + |b|$ $(b)\ |a+b| < |a| + |b|$

   $(c)\ |a-b| = |a| + |b|$ $(d)\ |a-b| < |a| + |b|$

   $(e)\ \big||a| - |b|\big| = |a-b|$ $(f)\ \big||a| - |b|\big| < |a-b|$

4. Decidir para qué valores reales de a y de b son válidas cada una de las siguientes afirmaciones:

   $(a)\ a < a^2$ $(b)\ a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

   $(c)\ a > 0 \Rightarrow ab \geq b$ $(d)\ a + b \geq \max\{a, b\}$

5. Sean $0 \leq x \leq y$. Probar que

$$x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y.$$

6. (a) Demostrar que los siguientes conjuntos no son acotados superiormente:
   i. $(0, +\infty)$
   ii. $\{n \in \mathbb{N} : \exists\, m \in \mathbb{N} \text{ tal que } n = m^2\}$

   (b) Demostrar que los siguientes conjuntos no son acotados inferiormente:
   i. $\mathbb{Z}$
   ii. $\{x^{-1} : x < 0\}$
   iii. $\mathrm{Im}(f)$, para $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

7. Hallar, si existen, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de los siguientes conjuntos:

   $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ y } 20 < n \leq 35\}$ $\qquad B = \{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

   $C = \{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$ $\qquad D = \{\frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\}$

8. (a) Calcular el supremo del conjunto $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\} \subset \mathbb{R}$. Concluir que A no tiene máximo.

   (b) Calcular el ínfimo del conjunto $B = \{a \in \mathbb{Q}_{>0} : a^2 > 2\} \subset \mathbb{R}$. Concluir que B no tiene mínimo.

9. Calcular

   (a) $\sup\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$ $\qquad (b)$ $\sup\{\frac{\sqrt{n+1}}{10+n} : n \in \mathbb{N}\}$

   (c) $\inf\{\frac{n-3}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$ $\qquad (d)$ $\inf\{n^2 - 9n - 10 : n \in \mathbb{N}\}$

10. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar la respuesta anterior con una demostración o un contraejemplo respectivamente.

    (a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2 \Rightarrow a_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

    (b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$ $(\forall n \geq n_0)$.

    (c) Si $a_n < 2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ es una sucesión convergente $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n < 2$.

    (d) Si $a_n < 2 - \frac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ es una sucesión convergente $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n < 2$.

11. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = \ell$.

    Determinar, para cada $\varepsilon > 0$ de la siguiente tabla, un valor $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $|\frac{n+1}{n} - \ell| < \varepsilon$ si $n > n_0$.

ε	$0,1$	$0,027$	$0,00001$	10^{-6}
n_0				

12. Dadas las sucesiones

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$
$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Probar que:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

(b) $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

Sugerencia: Notar que a_n y b_n constan de $n+1$ términos. Usar el principio de comparación.

13. Sea $a_n = \frac{4n-10}{n+1}$.

(a) Hallar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumpla que $3 < a_n < 5$.

(b) Hallar, si existen, $\max\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\min\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

14. Sean $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tales que $a_o > b_0 > 0$, y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones definidas recurrentemente por:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{y} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0).$$

Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $a_n \geq b_n$ para todo natural n.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones convergentes y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

15. Sea a_0 un número positivo. Se define la siguiente sucesión dada por recurrencia:

$$a_{n+1} := sen(a_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0).$$

Probar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente. Calcular su límite.

16. (a) Probar que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

(b) Calcular $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{7}{2^j}$ y $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \frac{3}{4^j}$.

17. (a) Probar que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

Sugerencia: Sumar, agrupando, el primer término con el último, el segundo con el penúltimo, etc.

(b) Sea $(k_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números naturales estrictamente creciente. Definimos

$$a_n := \frac{k_1 + \cdots + k_n}{k_n^2}.$$

Probar que $\forall\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $a_n \leq 1/2 + \varepsilon$.

Métricas y Topología en $\mathbb{R}^n$

18. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones en $\mathbb{R}^2$. Representar las soluciones en el plano.

    a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \leq 2\}$

    b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| > 2\}$

    c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

    d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

    e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 3\}$

    f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| + |y + 1| \geq 1\}$

    g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|; |y|\} = 1\}$

    h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|; |y|\} < 1\}$

19. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se define $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ y $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, ..., n\}$.

    Mostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

    (a) $|x_i| \leq \|x\|_2$, si $i = 1, \ldots, n$;
    (b) $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\ \|x\|_\infty$;
    (c) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\ \|x\|_\infty$. Describir geométricamente esta doble desigualdad.

20. Representar gráficamente los siguientes conjuntos A.

    (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + (y - 1)^2 \leq 3\}$
    (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < 5x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, |y| \leq \sqrt{5}\}$
    (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - \frac{y^2}{4} < 1\}$
    (d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge x^2 + y^2 + (z + 1)^2 < 1\}$;
    (e) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \wedge x^2 + y^2 > 1/2\}$.

21. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos, cerrados y/o acotados:

    (a) $K_1 = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;
    (b) $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
    (c) $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$;

(d) $K_4 = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$;

(e) $K_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge y = 0\}$.

22. Calcular ∂A, $\bar{A}$, $\bar{A} \setminus A$ y $A \setminus \partial A$ para los conjuntos A que aparecen en el Ejercicio 21.

    (Recordar que los símbolos significan: ∂A =borde de A, $\bar{A}$ =clausura de A, y $\setminus$ =resta, en este caso de conjuntos.)