

Álgebra I

Práctica 6 - Números Complejos

1. Para los siguientes $z \in \mathbb{C}$, hallar $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$, $\operatorname{Re}(z^{-1})$, $\operatorname{Im}(z^{-1})$, $\operatorname{Re}(-i \cdot z)$ e $\operatorname{Im}(i \cdot z)$

i) $z = (2 + i)(1 + 3i)$	v) $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{179}$
ii) $z = 5i(1 + i)^4$	vi) $z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-1}$
iii) $z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}i)^2(\overline{1 - 3i})$	vii) $z = \overline{1 - 3i}^{-1}$
iv) $z = i^{17} + \frac{1}{2}i(1 - i)^3$	

2. Dados $z = 1 + 3i$ y $w = 4 + 2i$, representar en el plano complejo los siguientes números

i) z	v) $-z$	ix) $\bar{z}$	xiii) $ 2z $
ii) w	vi) $2z$	x) $\overline{3z + 2w}$	xiv) $ z + w $
iii) $z + w$	vii) $\frac{1}{2}w$	xi) $\overline{iz}$	xv) $ z - w $
iv) $z - w$	viii) iz	xii) $ z $	xvi) $ \overline{w - z} $

3. Calcular las raíces cuadradas de los siguientes números complejos z

i) $z = -36$	ii) $z = i$	iii) $z = -3 - 4i$	iv) $z = -15 + 8i$
--------------	-------------	--------------------	--------------------

4. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos

i) $3 + \sqrt{3}i$	iii) $(-1 - i)^{-1}$	v) $(-1 + \sqrt{3}i)^{-5}$
ii) $(2 + 2i)(\sqrt{3} - i)$	iv) $(-1 + \sqrt{3}i)^5$	vi) $\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}$

5. Graficar en el plano complejo

i) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / |z| \geq 2 \text{ y } \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{2\pi}{3}\}.$

ii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / \arg(-iz) > \frac{\pi}{4}\}.$

iii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / |z| < 3 \text{ y } \arg(z^4) \leq \pi\}.$

6. i) Determinar la forma binomial de $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}\right)^{17}.$

ii) Determinar la forma binomial de $(-1 + \sqrt{3}i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}.$

iii) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i).$

7. Hallar en cada caso las raíces n -avas de $z \in \mathbb{C}:$

i) $z = 8, n = 6$	iv) $z = 2i(\sqrt{2} - \sqrt{6}i)^{-1}, n = 11$
ii) $z = -4, n = 3$	v) $z = (2 - 2i)^{12}, n = 6$
iii) $z = -1 + i, n = 7$	vi) $z = 1, n = 8.$

8. i) Calcular $w + \bar{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7.$

ii) Calcular $w^{73} + \bar{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3.$

- iii) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.
 iv) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \overline{w^4} + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$.
9. Determinar las raíces n -ésimas *primitivas* de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 12 .
10. Sea w una raíz quinceava primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que
- $$\text{i) } \sum_{i=0}^{n-1} w^{5i} = 0 \qquad \text{ii) } \sum_{i=2}^{n-1} w^{3i} = 0$$
11. i) Calcular la suma de las raíces n -ésimas primitivas de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 8, 10, 15$.
 ii) Calcular la suma de las raíces p -ésimas primitivas de la unidad para p primo.
12. Sea w una raíz cúbica primitiva de la unidad y sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por
- $$z_1 = 1 + w \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
- Probar que z_n es una raíz sexta primitiva de la unidad para todo $n \in \mathbb{N}$
13. Probar que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad si y solo si $\overline{w}$ lo es.
14. Sea w una raíz novena primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $w^{5n} = w^3$.
15. Sea $w \in G_{35}$ una raíz 35-ava primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{cases} w^{15n} &= w^5 \\ w^{14n} &= w^{21} \end{cases}$$

16. Sea G_{20} el conjunto de raíces 20-avas de la unidad y G_4 el conjunto de raíces cuartas de la unidad. Sea $\sim$ la relación en G_{20} definida por

$$a \sim b \iff a = \omega b, \text{ para algún } \omega \in G_4,$$

o sea dos elementos están relacionados si uno es un múltiplo del otro por una raíz cuarta de la unidad.

- i) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
 ii) ¿Cuántas clases de equivalencia hay en total?