FCEyN - UBA - Verano 2018

Álgebra I
Práctica 3 - Combinatoria de Conjuntos, Relaciones y Funciones

Cardinal de conjuntos y cantidad de relaciones y funciones

1. Dado el conjunto referencial $V = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n$ es múltiplo de $15\}$, determinar el cardinal del complemento del subconjunto A de V definido por $A = \{n \in V \,/\, n \geq 132\}$.

2. ¿Cuántos números naturales hay menores o iguales que 1000 que no son ni múltiplos de 3 ni múltiplos de 5?

3. Dados subconjuntos finitos A, B, C de un conjunto referencial V, calcular $\#(A \cup B \cup C)$ en términos de los cardinales de A, B, C y sus intersecciones.

4. i) Una compañía tiene 420 empleados de los cuales 60 obtuvieron un aumento y un ascenso, 240 obtuvieron solo un aumento y 115 obtuvieron solo un ascenso. ¿Cuántos empleados no obtuvieron ni aumento ni ascenso?

ii) En el listado de inscripciones de un grupo de 150 estudiantes, figuran 83 inscripciones en Análisis y 67 en Álgebra. Además se sabe que 45 de los estudiantes se anotaron en ambas materias. ¿Cuántos de los estudiantes no están inscriptos en ningún curso?

iii) En un instituto de idiomas donde hay 110 alumnos, las clases de inglés tienen 63 inscriptos, las de alemán 30 y las de francés 50. Se sabe que 7 alumnos estudian los tres idiomas, 30 solo estudian inglés, 13 solo estudian alemán y 25 solo estudian francés. ¿Cuántos alumnos estudian exactamente dos idiomas? ¿Cuántos inglés y alemán pero no francés? ¿Cuántos no estudian ninguno de esos idiomas?

5. Si hay 3 rutas distintas para ir de Buenos Aires a Rosario, 4 rutas distintas para ir de Rosario a Santa Fe, y 2 para ir de Santa Fe a Reconquista ¿cuántos formas distintas hay para ir de Buenos Aires a Reconquista pasando por las dos ciudades intermedias?

6. i) ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras (no pueden empezar con 0) hay que no contienen al dígito 5?

ii) ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras hay que contienen al dígito 7?

7. María tiene una colección de 17 libros distintos que quiere guardar en 3 cajas: una roja, una amarilla y una azul. ¿De cuántas maneras distintas puede distribuir los libros en las cajas?

8. Un estudiante puede elegir qué cursar entre 5 materias que se dictan este cuatrimestre. ¿De cuántas maneras distintas puede elegir qué materias cursar, incluyendo como posibilidad no cursar ninguna materia? ¿Y si tiene que cursar al menos dos materias?

9. Si A es un conjunto con n elementos ¿Cuántas relaciones en A hay? ¿Cuántas de ellas son reflexivas? ¿Cuántas de ellas son simétricas? ¿Cuántas de ellas son reflexivas y simétricas?

10. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones $f : A \to B$.

i) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\mathcal{F}$?

ii) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} : \ 10 \notin \mathrm{Im}(f)\}$?

iii) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} : \ 10 \in \mathrm{Im}(f)\}$?

iv) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} : \ f(1) \in \{2, 4, 6\}\}$?

11. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$.

i) ¿Cuántas funciones biyectivas $f : A \to B$ hay?

ii) ¿Cuántas funciones biyectivas $f : A \to B$ hay tales que $f(\{1, 2, 3\}) = \{12, 13, 14\}$?

12. ¿De cuántas formas se pueden permutar los números $1, 2, 3, 4, 5$ y 6? Por ejemplo, todas las permutaciones de $1, 2, 3$ son

$$1,2,3; \qquad 1,3,2; \qquad 2,1,3; \qquad 2,3,1; \qquad 3,1,2; \qquad 3,2,1.$$

13. ¿Cuántos números de 5 cifras distintas se pueden armar usando los dígitos del 1 al 5? ¿Y usando los dígitos del 1 al 7? ¿Y usando los dígitos del 1 al 7 de manera que el dígito de las centenas no sea el 2?

14. ¿Cuántos anagramas tiene la palabra *estudio*? ¿Y la palabra *murciélago*? Por ejemplo, todos los anagramas de la palabra *aro* son aro, aor, rao, roa, oar y ora.

15. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

i) ¿Cuántas funciones inyectivas $f : A \to B$ hay?

ii) ¿Cuántas de ellas son tales que $f(1)$ es par?

iii) ¿Cuántas de ellas son tales que $f(1)$ y $f(2)$ son pares?

16. ¿Cuántas funciones biyectivas $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ tales que $f(\{1, 2, 3\}) \subseteq \{3, 4, 5, 6, 7\}$ hay?

17. Sea $A = \{f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ tal que } f \text{ es una función inyectiva}\}$.

Sea $\mathcal{R}$ la relación en A definida por:

$$f \,\mathcal{R}\, g \iff f(1) + f(2) = g(1) + g(2)$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

ii) Sea $f \in A$ la función definida por $f(n) = n + 2$.
¿Cuántos elementos tiene su clase de equivalencia?

Número combinatorio

18. i) ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?

ii) ¿Y si se pide que 1 pertenezca al subconjunto?

iii) ¿Y si se pide que 1 no pertenezca al subconjunto?

iv) ¿Y si se pide que 1 o 2 pertenezcan al subconjunto pero no simultáneamente los dos?

19. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20\}$. Calcular la cantidad de subconjuntos $B \subseteq A$ que cumplen las siguientes condiciones:

i) B tiene 10 elementos y contiene exactamente 4 múltiplos de 3.

ii) B tiene 5 elementos y no hay dos elementos de B cuya suma sea impar.

20. Dadas dos rectas paralelas en el plano, se marcan n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con vértices en esos puntos?

21. ¿Cuántos anagramas tienen las palabras *elementos* y *combinatorio*?

22. Probar que $\binom{2n}{n} > n\, 2^n, \ \forall\, n \geq 4$.

23. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 2 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = 4a_n - 2\frac{(2n)!}{(n+1)!\, n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = \binom{2n}{n}$.

24. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}\, a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

i) Probar que $a_n \leq \dfrac{1}{2n}\dbinom{2n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Probar que $a_n > \dfrac{1}{3^{n-1}}\dbinom{2n}{n}$ para todo $n \geq 3$.

25. En este ejercicio no hace falta usar inducción: se puede pensar en el significado combinatorio de $\binom{n}{k}$ (como la cantidad de subconjuntos de k elementos en un conjunto de n elementos).

i) Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = 4^n$ y deducir que $\dbinom{2n}{n} < 4^n$.

ii) Calcular $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$.

iii) Probar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$ $\left(\text{sug: } k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}\right)$.

iv) Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ $\left(\text{sug: } \dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}\right)$.

26. Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ (sug: no hace falta usar inducción, aplicar el binomio de Newton).

27. Derivar a izquierda y derecha la igualdad $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ y evaluar lo obtenido en $x = 1$. ¿Qué se obtiene?

28. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 5, 7, 8, 9, 10\}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación de equivalencia en $\mathcal{P}(X)$ definida por:

$$A\,\mathcal{R}\,B \iff A \cap \{1, 2, 3\} = B \cap \{1, 2, 3\}.$$

¿Cuántos conjuntos $B \in \mathcal{P}(X)$ de exactamente 5 elementos tiene la clase de equivalencia $\overline{A}$ de $A = \{1, 3, 5\}$?

29. Sea $X = \{1, 2, \dots, 20\}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación de orden en $\mathcal{P}(X)$ definida por:

$$A\,\mathcal{R}\,B \iff A - B = \emptyset$$

¿Cuántos conjuntos $A \in \mathcal{P}(X)$ cumplen simultáneamente $\#A = 6$ y $A\,\mathcal{R}\,\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

30. i) Sea A un conjunto con $2n$ elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo $a \in A$ la clase de equivalencia de a tenga n elementos?

ii) Sea A un conjunto con $3n$ elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo $a \in A$ la clase de equivalencia de a tenga n elementos?