Práctica No. 6

1. Estudiar si las funciones que siguen son de variación acotada en el intervalo $[a,b]$ correspondiente y en el caso afirmativo dar una mayoración para $V_a^b f$.

   (a) $f(x) = \cos(x)$ en $[0, 3\pi]$

   (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   (c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ en $[-1, 2]$

   (d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)^2 & 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   En el caso (d) estudiar también la derivabilidad de f.

2. Demostrar que si f y g son funciones de variación acotada en $[a,b]$ entonces fg también lo es.

3. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sean $x, y \in [a,b]$ con $x < y$. Demostrar que $V_a^y f \le V_a^x f + V_x^y f$.

   En la clase teórica ya se vió la desigualdad opuesta, con lo que se tiene la fórmula aditiva:

   $$V_a^y f = V_a^x f + V_x^y f.$$

4. Aplicar el ejercicio anterior para calcular $V_a^b f$ en el caso de las funciones de los ítems (a) y (c) del ejercicio 2.

5. Para las funciones de variación acotada que siguen, hallar la función v_f (recordamos que $v_f(x) := V_a^x f$):

   (a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \le x < 0 \\ x & 0 \le x < 1 \\ 1-x & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \sin x$ en $[0, 2\pi]$

   Para cada función encontrar explícitamente funciones monótonas crecientes g_1 y g_2 tales que $f = g_1 - g_2$.

6. Demostrar que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función de variación acotada entonces es integrable Riemann.

7. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en $[a,b]$.

   (a) Demostrar que f es de variación acotada.

   (b) Demostrar que vale la igualdad $V_a^b f = \int\limits_a^b |f'(x)|\, dx$.

8. Sea $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que f es una función continua y α es de variación acotada.

   (a) Demostrar que $| f | \in \Re(v_\alpha)$.

   (b) Demostrar que vale la desigualdad $\left|\int_a^b f\, d\alpha\right| \le \int\limits_a^b |f|\, dv_\alpha$. [Sug.: ejercicio 3, práctica 5.]

   (c) Deducir de (b) que $\left|\int_a^b f\, d\alpha\right| \le \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|\, V_a^b \alpha$.

   (d) Para cada $x \in [a,b]$ se define $\psi(x) = \int_a^x f\, d\alpha$ (observar que ψ está bien definida). Probar que ψ es de variación acotada.