Práctica No. 3

1. Sean $\| (x_1, ..., x_n) \|_1 := \sum_{1\leq i\leq n} | x_i |$ y $\| (x_1, ..., x_n) \|_\infty := \max_{1\leq i\leq n} | x_i |$.

   Demostrar que las funciones $\| * \|_1$ y $\| * \|_\infty$ son normas.

2. Demostrar que si N es una norma en $\mathbb{R}^n$, entonces $d(v, w) := N(v - w)$ es una distancia en $\mathbb{R}^n$.

3. Decidir para cada uno de los siguientes conjuntos si es abierto, cerrado, acotado:

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 1\}$ (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$

   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0\}$ (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 > 4\}$

   (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy > z\}$

4. Sean S, T subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Demostrar las propiedades siguientes:

   (a) $S^\circ = \{p \in \mathbb{R}^n / \exists \varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subseteq S\}$.
   (b) Si $S \subseteq T$ entonces $S^\circ \subseteq T\ ^\circ$.
   (c) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una intersección infinita?
   (d) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. ¿Vale la igualdad?
   (e) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?
   (f) $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. ¿Vale la igualdad?
   (g) $(\mathbb{R}^n - S)^\circ = \mathbb{R}^n - \overline{S}$.

5. En cada uno de los siguientes casos hallar $S^\circ, \overline{S}$ y ∂S.

   (a) $S = [0, 1]$ (b) $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ (c) $S = [-1, 0) \cup \{1\}$

   (d) $S = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$ (e) $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (f) $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

6. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

   (a) Demostrar que S es abierto si y sólo si es disjunto con ∂S.
   (b) Demostrar que S es cerrado si y sólo si $\partial S \subset S$.

7. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, demostrar que $p \in \partial S$ si y sólo si todo entorno de p contiene un punto en S y un punto que no está en S.

8. Si $S \subset \mathbb{R}^n$ notamos con S' al conjunto de todos los puntos de acumulación de S.

   (a) Hallar S' para cada uno de los conjuntos del ejercicio 5.

(b) *Un punto* $p \in S$ *se llama* un punto aislado de S *si existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $B(p, \varepsilon) \cap S = \{p\}$. Demostrar que $\overline{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$.

9. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right), \text{con } n, m \in \mathbb{N}\right\}$. Hallar la clausura $\overline{S}$.

10. Hallar todos los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ que son a la vez abiertos y cerrados.

11. Probar que todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo. ¿Es cierta la recíproca?

12. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real acotada y sea A el conjunto de sus puntos límites.
    (a) Probar que A es compacto.
    (b) Probar que el máximo y el mínimo de A son $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ y $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, respectivamente.

13. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se considera el intervalo abierto $\Im_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$.
    a) Demostrar que $(0, 1) = \bigcup\limits_{n\geq 2} \Im_n$.
    b) ¿Existe un conjunto *finito* $\mathcal{F} \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $(0, 1) = \bigcup\limits_{n\in\mathcal{F}} \Im_n$? Justificar.
    c) ¿Qué puede decir sobre la compacidad del conjunto $(0, 1)$?

14. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, demostrar que S es un conjunto compacto si y sólo si toda sucesión contenida en S contiene una subsucesión que converge a un punto de S.

15. Sean $S, T \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos. Demostrar que $S \cup T$ y $S \cap T$ son compactos. ¿Qué ocurre si se toman uniones o intersecciones infinitas?

16. Sea $U_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \parallel (x, y) - (0, n) \parallel < n\}$. Demostrar que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es el semiplano superior abierto.

17. Sea $S = \left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \ / \ n, m \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ (cf. ejercicio 5 (f) de la Práctica 1). Demostrar que los puntos de acumulación de S son los puntos de la forma $\dfrac{1}{n}$ y el 0. ¿El conjunto $S \cup \{0\}$ es compacto?
