Práctica No. 2

1. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos reales. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $b_n = a_{n+3}$. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

2. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente de términos positivos. Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n^2}$ es una serie convergente.

3. Estudiar la convergencia de las siguientes series numéricas:

   $(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+3}$ $\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ $\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$

   $(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ $\quad (e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ $\quad (f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$

   $(g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}$ $\quad (h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$ $\quad (i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$

4. Hallar la suma de las siguientes series:

   $(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$ $\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ $\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $\quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$

5. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-4n+2}{n!}$.

   [Sugerencia: descomponer el término general de la serie en la forma $\frac{3n^2-4n+2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$, para $A, B, C \in \mathbb{R}$ adecuados. Recordar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es convergente y que vale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.]

6. Para cada serie, determinar cuántos términos es necesario sumar para obtener un resultado que difiera en menos de $1/10^6$ de la suma total.

   $(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ $\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

7. Exhibir una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de términos no negativos, que tienda a 0 y tal que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ no converja (y demostrar que efectivamente no converge).

8. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes de números reales. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $c_{2n} = a_n$ y $c_{2n-1} = b_n$. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge.

9. ¿Es cierto que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series divergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es divergente?

10. Probar el siguiente resultado: ***Criterio de Raabe.***
Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos y α un número real mayor a 1. Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ vale $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n}$. Probar que $\sum a_n$ converge.

    [Sugerencia: Analizar el comportamiento de la sucesión $(n-1)a_n$.]

11. Probar el siguiente resultado: ***Teorema de Abel.***
Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de términos positivos tal que $\sum a_n$ converge, entonces $na_n \to 0$ si $n \to \infty$.

    [Sugerencia: $na_{2n} \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} \to 0$ si $n \to \infty$, y similarmente para na_{2n+1}.]

12. Probar el siguiente resultado: ***Criterio de condensación de Cauchy.***
Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números no negativos. Entonces la serie $\sum a_n$ converge si y sólo si la serie $\sum 2^n a_{2^n}$ converge.

13. Decidir si las siguientes series convergen condicional o absolutamente:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\ 2^n}$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ $\qquad$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-2n-1}{n!}$

14. (a) Mostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.
¿Vale este resultado si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge sólo condicionalmente?

    (b) ¿Si la serie de términos no negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, se puede decir algo de $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$?

15. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con $|\alpha| < 1$. Mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$.

16. Determinar todos los valores de x para los cuales convergen las siguientes series.

    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$ $\qquad$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

    (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin(\frac{x}{3^n})$ $\qquad$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$ $\qquad$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$