# Práctica No. 1

1. A partir de los axiomas de cuerpo demostrar las siguientes propiedades cualesquiera sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

   i) $0.a = a.0 = 0$.
   ii) Si $ab = 0$ entonces $a = 0 \quad b = 0$.
   iii) Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.
   iv) $(-a)b = -(ab)$ y $(-a)(-b) = ab$.
   v) Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $bd \neq 0$ y $(ab^{-1})(cd^{-1}) = (ac)(bd)^{-1}$.

2. A partir de los axiomas de cuerpo ordenado demostrar las siguientes propiedades cualesquiera sean $a, b \ y \ c \ \in \mathbb{R}$:

   i) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
   ii) Si $a < b$ entonces $-b < -a$.
   iii) Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.
   iv) Si $ab > 0$ entonces $a$ y $b$ son ambos positivos o ambos negativos.
   v) Si $a^2 + b^2 = 0$ entonces $a = b = 0$.
   vi) Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

3. Sea $A$ un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y sea $s \in \mathbb{R}$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   i) $s$ satisface las siguientes dos condiciones:
      (a) $\forall a \in A$ se tiene $s \geq a$;
      (b) si $t \geq a$ para todo $a \in A$ entonces $t \geq s$.
   ii) $s$ satisface las siguientes dos condiciones:
      (a) $\forall a \in A$, se tiene $s \geq a$;
      (b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$ tal que $s - \varepsilon < a_\varepsilon$.
   iii) $s$ satisface las siguientes dos condiciones:
      (a) $\forall a \in A$, se tiene $s \geq a$;
      (b) existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida $A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$.

   Enuncie caracterizaciones análogas para el ínfimo de $A$ y demuestre su equivalencia

4. Sean $A$ y $B \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos, tales que $A \subseteq B$.

   a) Suponiendo que $A$ y $B$ están acotados superior e inferiormente. Establezca y demuestre las relaciones de orden que hay entre los números $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\sup(B)$, $\inf(B)$.
   b) ¿Qué sucede cuando $A$ o $B$ no está acotado superior o inferiormente?

5. Hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

   (a) $A_1 = (a, b]$.

   (b) $A_2 = \left\{ \dfrac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

   (c) $A_3 = A_2 \cup \{0\}$.

   (d) $A_4 = \left\{ x \in \mathbb{Q}\ : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \right\}$.

   (e) $A_5 = \left\{ x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R} \right\}$.

   (f) $A_6 = \left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$.

   (g) $A_7 = \left\{ x^2 - 5x + 4 : x \in [2, 4) \right\}$.

   (h) $A_8 = \emptyset$.

6. Si $A \subset \mathbb{R}$ es no vacío, para cada $c \in \mathbb{R}$ se definen los conjuntos

$$c.A = \{c.x : x \in A\} \quad y \quad -A = (-1).A.$$

   Probar las siguientes afirmaciones:

   i) Si $A$ está acotado superiormente entonces $-A$ está acotado inferiormente y se tiene que $\inf(-A) = -\sup A$.

   ii) Si $c > 0$ y $A$ está acotado superiormente entonces $c.A$ también lo está y $\sup(c.A) = c \sup A$.

   iii) ¿Qué se puede decir en el caso que $c < 0$?

   iv) Enuncie resultados análogos a los anteriores para $\inf(c.A)$ (y demuestre alguno(s)).

7. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ambos no vacíos se definen los conjuntos

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\} \quad y \quad A.B := \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

   i) ¿Qué condiciones deben satisfacer $A$ y $B$ para que exista $\sup(A + B)$? Cuando se cumplen, estudiar la relación entre $\sup(A + B)$ y $\sup(A) + \sup(B)$.

   ii) Realice el mismo análisis para el conjunto $A.B$ y los números $\sup(AB)$ y $\sup(A).\sup(B)$.

8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) Existe un único entero $n$ tal que $n \leq a < n + 1$. Llamamos a $n$ la *parte entera* de $a$.

   b) Existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$.

   c) Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ estríctamente decreciente tal que $\lim_{n \to \infty} q_n = x$.

   A raíz de este hecho decimos que $\mathbb{Q}$ es *denso* en $\mathbb{R}$.

9. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim_{n \to \infty} a_n = a$. Probar que $\lim_{n \to \infty} {a_n}^2 = a^2$.

10. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos tal que $\lim_{n \to \infty} a_n = a$. Probar que $\lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

11. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión definida recursivamente por $a_0 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ para cada $n \geq 0$. Muestre que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona y que está acotada superiormente por 2. Determine su límite.

12. Hallar los puntos límites y los límites superior e inferior de las sucesiones:

| | | |
|---|---|---|
| $(a)\ 1-\dfrac{1}{n}$ | $(b)\ (-1)^n$ | $(c)\ \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ |
| $(d)\ (-1)^n\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$ | $(e)\ \frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\ldots$ | $(f)\ \dfrac{n+(-1)^n(2n+1)}{n}$ |

13. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones acotadas de números reales tales que $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Entoces

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

14. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones acotadas de números reales, determinar y demostrar las relaciones de orden entre los siguientes cuatro números:

| | |
|---|---|
| $\liminf\limits_{n\to\infty}\ (a_n+b_n)$ | $\limsup\limits_{n\to\infty}\ (a_n+b_n)$ |
| $\limsup\limits_{n\to\infty}\ a_n + \limsup\limits_{n\to\infty}\ b_n$ | $\liminf\limits_{n\to\infty}\ a_n + \liminf\limits_{n\to\infty}\ b_n$ |

15. a) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos tal que $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$. Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

    b) Usando este resultado mostrar que:

    i) Si $\alpha > 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0$.

    ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

    iii) Si $0 < \alpha < 1$ y $k \in \mathbb{Z}$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} n^k\alpha^n = 0$.

16. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada superiormente. Probar que $M \in \mathbb{R}$ es el límite superior de esta sucesión si y sólo si para todo $\epsilon > 0$

    i) existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ para los que $a_n > M - \epsilon$, y

    ii) existe solamente una cantidad finita de $n \in \mathbb{N}$ para los que $a_n > M + \epsilon$.

17. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada superiormente. Probar que el límite superior es el máximo de los puntos límites de la sucesión.

18. Dadas $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones acotadas de números reales, se define la sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera:

$$c_{2n} = a_n \quad y \quad c_{2n-1} = b_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

¿Cuál es la relación entre el límite superior de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y los de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

19. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

    (a) Probar que si $r < L$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r\ \forall\, n \geq n_0$.

    (b) Análogamente, si $r > L$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < r\ \forall\, n \geq n_0$.

    (c) ¿Puede reformularse (a) i. si se sabe que $r \leq L$?

    (d) ¿Qué puede decirse de $L$ si se sabe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r\ \forall\, n \geq n_0$?