MATEMATICA 2 - Verano 2017

Práctica 6 - Diagonalización

1. Para las matrices A siguientes, calcular el polinomio característico, los autovalores y bases y dimensiones de los espacios de autovectores correspondientes a cada autovalor (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$). En cada caso decidir si la matriz es diagonalizable, y de ser posible, exhibir una matriz P inversible tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Como en el ejercicio anterior, discutiendo según los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$).

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

3. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+k^2 & -k^2 \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

4. Sea $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que para toda fila F_i, la suma de sus coeficientes es igual a 1. Probar que 1 es autovalor de A y encontrar un autovector correspondiente.

5. Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector con $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$. Probar que f es diagonalizable y calcular el polinomio característico $\mathcal{X}_f$ de f.

6. Calcular A^n para todo $n \in \mathbb{N}$ para las siguientes matrices A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Determinar en cada caso si es posible encontrar $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $B^2 = A$. ¿Y en $\mathbb{C}^{2\times 2}$?

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-7y + z, 4y, -2x + y + 3z).$$

   a) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal.
   b) Calcular $f^n := f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n veces), $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
   c) Hallar, si es posible, una transformación lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

8. Encontrar una fórmula general para x_n e y_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$, en función de x_0 e y_0 (ecuaciones en diferencias):
$$\begin{cases} x_{n+1} &= 6\,x_n + 2\,y_n \\ y_{n+1} &= 2\,x_n + 3\,y_n \end{cases}.$$

9. Se define una sucesión de números enteros de la siguiente manera:
$$a_0 := 1, \quad a_1 := 2 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n,\ \forall\ n \geq 0.$$

   a) Determinar $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que para todo $n \geq 0$
$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}.$$

   b) Usando lo anterior mostrar que para todo $n \geq 0$ se tiene
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   c) Diagonalizando la matriz A determinar el valor de a_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

10. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con autovalores $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$. Para un vector inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, se define $x^{(n)} = A^n x^{(0)}$. Probar que para todo $x^{(0)}$ se cumple $x^{(n)} \to 0$ (es decir, $x_i^{(n)} \to 0$, $1 \leq i \leq 3$).

11. Supongamos que en cierta especie hay una epidemia en la que al cabo de cada mes se enfermó la mitad de los que están sanos a principios de mes y murió la cuarta parte de los que estaban enfermos. Llamemos x_k al número de muertos al cabo del k- ésimo mes, y_k al número de enfermos al cabo del k-ésimo mes y z_k al número de sanos al cabo del k-ésimo mes.

   a) Determinar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que describa el proceso, o sea tal que
$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}.$$

   b) Si la distribución original (x_0, y_0, z_0) al principio del primer mes (o término del mes 0) es $(0, 0, 10000)$, o sea de ningún enfermo y 10000 sanos, calcular el número de enfermos al cabo del k-ésimo mes.

   c) Probar que cualquiera sea la distribución original (x_0, y_0, z_0), (x_k, y_k, z_k) tiende a un múltiplo de $(1, 0, 0)$ (determinarlo en función de (x_0, y_0, z_0)), es decir mueren todos (lo cual es obvio ya que se enferman o se mueren pero ni se curan ni nacen nuevos individuos en el modelo).

12. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

   a) $\begin{cases} x'(t) &= 8x(t) + 10y(t) \\ y'(t) &= -5x(t) - 7y(t) \end{cases}.$

   b) $\begin{cases} x'(t) &= 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$, con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

13. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

   a) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2.

14. Encontrar una tercera columna para que la matriz $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sea ortogonal siendo

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & * \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & * \end{pmatrix}.$$

¿Cuántas soluciones hay? Interpretar geométricamente.

15. Encontrar $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonal con $\det(U) = -1$.

16. Encontrar una tercer fila para que la matriz $U \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ sea unitaria siendo

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3i}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & i \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

17. Para todos los casos de los ejercicios anteriores donde la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a diagonalizar es simétrica, determinar una matriz ortogonal U tal que $U^t A U$ es diagonal.

18. Encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ unitaria tal que $\overline{U^t} A U$ sea diagonal para la matriz A siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2i & 1 \\ -2i & 3 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$

19. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

    a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

    b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.

20. Determinar y clasificar todas las transformaciones ortogonales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tales que $f(3,4) = (5,0)$.

21. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

    a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

    b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $\langle(1,0,1)\rangle$.

22. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una rotación de eje $\langle(2,-2,-1)\rangle$ y ángulo $\pi/2$. Hallar $f(4,-1,1)$.

23. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

24. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es $\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$.

    a) Probar que f es una rotación.

    b) Hallar una transformación lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

25. Halar una rotación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\sqrt{2}/2, 1, -\sqrt{2}/2) = (0, \sqrt{2}, 0)$.

26. Hallar una simetría $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(2, -1, 2) = (0, 3, 0)$.

27. Determinar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

28. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}.$$

    Probar que para todo $v \in \mathbb{R}^2$, se tiene $\|A\,v\| \geq 15\,\|v\|$.

29. Hallar la matrices de rango 1 y 2 más cercanas, con la distancia en $\mathbb{R}^{n\times n}$ dada por $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(AA^t)}$, a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

30. *Descomposición polar de una matriz (*)*

    a) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que A admite una descomposición en la forma $A = Q\,P$ donde $Q, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisfacen que Q es una matriz ortogonal y P es una matriz simétrica semidefinida positiva (es decir $v^t\,P\,v \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$).

    b) Calcular la descomposición polar de $A = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$.