

**MATEMÁTICA 2 - Verano 2017**  
**Práctica 3 - Transformaciones lineales**

1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_2, 1 + x_1)$

b)  $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

c)  $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ,  $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$

d)  $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$

2. Interpretar geoméricamente las siguientes transformaciones lineales  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

a)  $f(x, y) = (x, 0)$

b)  $f(x, y) = (x, -y)$

c)  $f(x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t)$ , con  $t \in \mathbb{R}$  fijo.

3. Probar que las siguientes funciones son transformaciones lineales:

a)  $\text{tr} : K^{n \times n} \rightarrow K$ ,  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$

b)  $f : K^{n \times m} \rightarrow K^{r \times m}$ ,  $f(A) = BA$  donde  $B \in K^{r \times n}$  está dado

c)  $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\delta(f) = f'$

d)  $\Phi : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ ,  $\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$

e)  $\epsilon_\alpha : K[X] \rightarrow K$ ,  $\epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$ , donde  $\alpha \in K$

4. a) Mostrar que existe una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(1, 1) = (-5, 3)$  y  $f(-1, 1) = (5, 2)$ , y que es única. Para dicha  $f$ , determinar  $f(5, 3)$  y  $f(-1, 2)$ .

b) ¿Existe una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(1, 1) = (2, 6)$ ;  $f(-1, 1) = (2, 1)$  y  $f(2, 7) = (5, 3)$ ?

c) Sean  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  transformaciones lineales tales que

$$\begin{aligned} f(1, 0, 1) &= (1, 2, 1), & f(2, 1, 0) &= (2, 1, 0), & f(-1, 0, 0) &= (1, 2, 1), \\ g(1, 1, 1) &= (1, 1, 0), & g(3, 2, 1) &= (0, 0, 1), & g(2, 2, -1) &= (3, -1, 2). \end{aligned}$$

Determinar si  $f = g$ .

d) Hallar todos los  $a \in \mathbb{R}$  para los cuales exista una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que satisfaga que  $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$ ,  $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$  y  $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$ .

5. a) Calcular el núcleo y la imagen de cada una de las transformaciones lineales de los ejercicios 1 y 2. Decidir, en cada caso, si  $f$  es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular  $f^{-1}$ .

b) Clasificar las transformaciones lineales  $\text{tr}$  y  $\epsilon_\alpha$  del Ejercicio 2 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

6. Sea  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal dada por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4, 2x_1 + x_3 - x_4)$$

Calcular  $\text{Nu}(f)$  e  $\text{Im}(f)$ , y determinar el conjunto  $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 6)\}$ .



- c) Calcular las matrices inversibles  $Q \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  y  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tales que  $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = Q[f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}P$  donde  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{E}'$  son las bases canónicas de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^4$  respectivamente. ¿Cuáles son?

16. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3).$$

- a) Determinar bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^3$  tales que  $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- b) Si  $A$  es la matriz de  $f$  en la base canónica, calcular su rango y encontrar matrices inversibles  $Q$  y  $P$  tales que  $QAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- c) ¿Existe una base  $\mathcal{B}''$  de  $\mathbb{R}^3$  para la cual  $[f]_{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ?

17. Sean  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  una base de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  una base de  $\mathbb{R}^4$ . Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la transformación lineal tal que

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- a) Hallar  $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ . ¿Cuáles son sus coordenadas en la base  $\mathcal{B}'$ ?
- b) Hallar una base de  $\text{Nu}(f)$  y una base de  $\text{Im}(f)$ .
- c) Describir el conjunto  $\{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = w_1 - 3w_3 - w_4\}$ .

18. Dada  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + x_3),$$

- a) Calcular  $[f]_{\mathcal{B}}$  con  $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ .
- b) Verificar que  $f$  es un isomorfismo.
- c) Exhibir una matriz inversible  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que  $[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[f]_{\mathcal{E}}P$ . ¿Cuál es?

19. Para las siguientes  $f : V \rightarrow V$ , calcular  $[f]_{\mathcal{E}}$ , donde  $\mathcal{E}$  es la base canónica

- a)  $V = \mathbb{R}_4[X]$ ,  $f(P) = P'$ ,  $\mathcal{E} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ .
- b)  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $f(A) = A^t$ ,  $\mathcal{E} = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$ .

20. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3)$ . Probar que  $f$  es un proyector (i.e.  $f \circ f = f$ ) y encontrar una base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  en la cual  $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

21. En cada uno de los siguientes casos construir, si es posible, un proyector  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que cumpla lo pedido

- a)  $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$  e  $\text{Im}(f) = \langle (-2, 1, 1) \rangle$
- b)  $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\}$  e  $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$

y en caso que sea posible encontrar una base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $[f]_{\mathcal{B}}$  sea una matriz diagonal con solo 1 o 0 en la diagonal.