

**MATEMÁTICA 2 - Verano 2017**  
**Práctica 2 - Espacios vectoriales**

1. Mostrar que los siguientes son espacios vectoriales, verificando que son subespacios de espacios vectoriales conocidos. Explicitar la suma y el producto por escalares en cada caso.
  - a)  $K_n[X] := \{f \in K[X] : f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \leq n\}$ , polinomios de grado a lo sumo  $n$
  - b)  $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^t = -A\}$
  - c)  $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : f''(1) = f(2)\}$ , donde  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  son las funciones continuas infinitamente derivables
  - d)  $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : \int_0^1 f(x) dx = 0\}$ , donde  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  son las funciones continuas
2. Mostrar que  $\{f \in K[X] : f = 0 \text{ ó } \text{gr}(f) \geq 2\}$  no es un subespacio de  $K[X]$ .
3. Dados  $S, T$  subespacios de un espacio vectorial  $V$ , probar que  $S \cup T$  es un subespacio de  $V \iff S \subseteq T \text{ ó } T \subseteq S$ .
4. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales
  - a)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0; x - y = 0\}$
  - b)  $\{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A = -A^t\}$
  - c)  $\{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \text{tr}(A) = 0\}$
  - d)  $\mathbb{R}_n[X]$
  - e)  $\{f \in \mathbb{R}_4[X] : f(1) = 0 \text{ y } f(2) = f(3)\}$
5. Sea  $S = \langle (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ .
  - a) Determinar si  $(2, 1, 3, 5) \in S$ .
  - b) Determinar si  $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ .
  - c) Determinar si  $\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$ .
6. Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial y sean  $v, w \in V$ . Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.
  - a)  $\langle v, w \rangle = \langle v, w + 5v \rangle$ .
  - b)  $\langle v, w \rangle = \langle v, aw + bv \rangle, \forall a, b \in K$ .
  - c)  $\langle v, w \rangle = \langle v, aw + bv \rangle, \forall a \in K - \{0\}, b \in K$ .
  - d)  $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_3, v_4, w \rangle \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$ .
  - e)  $\langle v_1, v_2, w \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \Leftrightarrow w \in \langle v_1, v_2 \rangle$ .
7. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre  $K$ .
  - a)  $\{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$  en  $\mathbb{C}^2$  para  $K = \mathbb{R}$  y para  $K = \mathbb{C}$ .
  - b)  $\{(1 - X)^3, (1 - X)^2, 1 - X, 1\}$  en  $K[X]$
  - c)  $\{\sin x, \cos x, x \cos x\}$  en  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  para  $K = \mathbb{R}$ , donde  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  son las funciones  $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ .
  - d)  $\{e^x, x, e^{-x}\}$  en  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  para  $K = \mathbb{R}$
  - e)  $u = (1, 0, 1, 0, 1, \dots), v = (0, 1, 0, 1, 0, \dots), w = (1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$  en  $K^{\mathbb{N}}$ , donde  $K^{\mathbb{N}}$  son las sucesiones  $\{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in K\}$ .

8. Hallar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales cada uno de los siguientes subconjuntos es linealmente independiente.

- a)  $\{(1, 2, k), (1, 1, 1), (0, 1, 1 - k)\} \subset \mathbb{R}^3$   
 b)  $\{(k, 1, 0), (3, -1, 2), (k, 2, -2)\} \subset \mathbb{R}^3$   
 c)  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$

9. Hallar una base y la dimensión de los siguientes  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales.

- a)  $\langle (1, 4, -2, 1), (1, -3, -1, 2), (3, -8, -2, 7) \rangle$   
 b)  $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$   
 c)  $\{f \in \mathbb{R}_3[X] : f(2) = f(-1)\}$   
 d)  $\{f \in \mathbb{R}_3[X] : f(2) = f'(2) = 0\}$   
 e)  $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{tr}(A) = 0\}$   
 f)  $\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_i = a_j, \forall i, j\}$

10. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del  $K$ -espacio vectorial  $V$  indicado.

- a)  $\{(1, 1, 1, 1), (0, 2, 1, 1)\}, V = \mathbb{R}^4, K = \mathbb{R}$   
 b)  $\{X^3 - 2X + 1, X^3 + 3X\}, V = \mathbb{R}_3[X], K = \mathbb{R}$   
 c)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}, V = \mathbb{C}^{2 \times 2}, K = \mathbb{C}$

11. Extraer una base de los siguientes  $K$ -espacios vectoriales, de cada uno de los sistemas de generadores dados.

- a)  $\langle (1, 1, 2), (1, 3, 5), (1, 1, 4), (5, 1, 1) \rangle \subset \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$   
 b)  $\langle X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 1, X + 2 \rangle \subset \mathbb{R}[X], K = \mathbb{R}$   
 c)  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^{2 \times 2}, K = \mathbb{C}$

12. Hallar la dimensión de los siguientes  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales, para cada  $k \in \mathbb{R}$

- a)  $\langle (1, k, 1), (-1, k, 1), (0, 1, k) \rangle$   
 b)  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$   
 c)  $\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$  siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k - 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

13. Determinar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales

$$\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle = \langle (1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k) \rangle$$

14. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios  $S \cap T$  y  $S + T$  de  $V$ . Determinar si la suma es directa.

- a)  $V = \mathbb{R}^3, S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\}$  y  $T = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$   
 b)  $V = \mathbb{R}^3, S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$  y  $T = \langle (1, 1, 0), (5, 7, 3) \rangle$   
 c)  $V = \mathbb{R}^3, S = \langle (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) \rangle$  y  $T = \langle (1, 1, 0), (3, 2, 1) \rangle$

- d)  $V = \mathbb{R}[X]$ ,  $S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(1) = 0\}$  y  $T = \langle 1, X, X^2, X^3 + 2X^2 - X, X^5 \rangle$
- e)  $V = \mathbb{R}[X]$ ,  $S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f(0) = 0\}$  y  $T = \{f \in \mathbb{R}[X] : f'(0) = f''(0) = 0\}$
15. Sean  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$  y  $T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle \subset \mathbb{R}^3$ . Determinar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales  $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$ .
16. En cada caso siguiente, probar que  $S$  y  $T$  son subespacios de  $V$  que satisfacen  $S \oplus T = V$ .
- a)  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(0) = 0\}$  y  $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ es constante}\}$
- b)  $V = K^{n \times n}$ ,  $S = \{A \in K^{n \times n} : A = A^t\}$  y  $T = \{A \in K^{n \times n} : A = -A^t\}$   
(los elementos de  $S$  se llaman *matrices simétricas* y los de  $T$ , *matrices antisimétricas*).
17. Para cada subespacio  $S \subseteq V$  dado, hallar un subespacio  $T \subseteq V$  tal que  $S \oplus T = V$ .
- a)  $S = \langle (1, 2, -1, 3), (2, 3, -2, 1), (0, 1, 0, 7) \rangle$ ,  $V = \mathbb{R}^4$
- b)  $S = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \text{tr}(A) = 0\}$ ,  $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$
- c)  $S = \langle 3, 1 + X^2 \rangle$ ,  $V = \mathbb{R}_4[X]$
18. Mostrar que si  $S, T$  son subespacios de  $\mathbb{R}^3$  tales que  $\dim S = \dim T = 2$ , entonces existe  $v \neq 0$  tal que  $v \in S \cap T$ .
19. Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $T$  un hiperplano de  $V$  (i.e. un subespacio de dimensión  $n - 1$ ).
- a) Probar que  $\forall v \notin T, T \oplus \langle v \rangle = V$ .
- b) Si  $S$  es un subespacio de  $V$  tal que  $S \not\subseteq T$ , probar que  $S + T = V$ . Calcular  $\dim(S \cap T)$ .
- c) Si  $S$  y  $T$  son dos hiperplanos distintos, deducir  $\dim(S \cap T)$ .
20. Encontrar las coordenadas de  $v \in V$  respecto de la base  $\mathcal{B}$  en los siguientes casos:
- a)  $V = \mathbb{R}^3$ ;  $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$ ,  $v = (1, 2, -1)$  y  $v = (x_1, x_2, x_3)$
- b)  $V = \mathbb{R}_3[X]$ ;  $\mathcal{B} = \{3, X + 1, X^2 + 5, X^3 + X^2\}$ ,  $v = 2X^2 - X^3$
- c)  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ;  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$